



Dynamik von Doppelstern-Systemen

**Fabian Fries,
Manfred Hahn**

Schriftenreihe der Wilhelm Büchner Hochschule

Ausgabe 2 / 2022

Fabian Fries, Manfred Hahn

Schriftenreihe der Wilhelm Büchner Hochschule

Herausgeber Forschungsausschuss der Wilhelm Büchner Hochschule
02.03.2022

Wilhelm Büchner Hochschule

Impressum

ISSN (Online) 2751-0514

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

©Wilhelm Büchner Hochschule Darmstadt 2022

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Werden Personenbezeichnungen aus Gründen der besseren Lesbarkeit nur in der männlichen oder weiblichen Form verwendet, so schließt dies das jeweils andere Geschlecht mit ein.

Herausgeber: Forschungsausschuss der Wilhelm Büchner Hochschule
Redaktion: Dr. Marcel Heber
Layout und Satz: Dominik Feldmeier
Einbandentwurf: Gerhard Kienzle
Projektkoordination: Prof. Dr. Rainer Eisland

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Dynamik von Doppelstern-Systemen

Fabian Fries, Manfred Hahn

Zusammenfassung Diese Arbeit befasst sich mit der Dynamik von Doppelsternsystemen. Um dem Leser ein grundlegendes Verständnis der Materie zu vermitteln, wird zunächst die Sternentstehung und -entwicklung beschrieben und ein (historischer) Überblick über die (Binär-)Sternbeobachtung gegeben. Unterscheidungsmerkmale verschiedener Arten von Doppelsternen und ihre Beobachtungsmöglichkeiten werden vorgestellt. Die Dynamik von Doppelsternsystemen wird ausführlich behandelt, das Roche-Volumen wird abgeleitet, um die Materieflüsse zwischen Doppelsternen zu beschreiben, und das Zweikörperproblem der Himmelsmechanik wird gelöst, um die Erhaltung des Impulssatzes abzuleiten für Doppelsternsysteme. Abschließend wird ein Überblick über die Rolle von Gravitationswellen bei der Bewegung von Doppelsternen gegeben und einige Nachweismethoden vorgestellt.

Keywords: Doppelsterne – Dynamik – Drall – Drallerhaltung

Abstract This paper deals with the dynamics of binary star systems. In order to provide the reader with a basic understanding about the matter, firstly the stellar formation and evolution is described, and a (historical) overview of (binary-) star observation is given. Distinguishing features of different types of binary stars and their observational possibilities are presented. The dynamic of double star systems is treated in an extensive way, the Roche volume is derived to describe the fluxes of matter between double stars, and the two-body problem of celestial mechanics is solved to derive the conservation of momentum theorem for binary star systems. Finally, an overview of the role of gravitational waves in the motion of binary stars is given and some methods of detection are presented.

Keywords: Binary stars – dynamic –momentum - conservation of momentum

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	1
2	Sternentstehung	1
3	Hertzsprung-Russel-Diagramm.....	5
4	Geschichte der Doppelstern-Beobachtung.....	10
5	Beobachtung und Klassifizierung von Doppelsternen	12
6	Beispiele für verschiedene Doppelsternsystem.....	18
7	Dynamik und Stabilität von Mehrfachsternsystemen	19
8	Roche-Grenze und Massefluss zwischen engen Doppelsternen.....	21
9	Lösung des Zweikörperproblems und Nachweis des Draller haltungssatzes für die Doppelsternsysteme	29
10	Anwendung der Erkenntnisse zur Bestimmung der Massen von Doppelsternen.....	34
11	Emission von Gravitationswellen durch Doppelsternsysteme	37
12	Nachweis von Gravitationswellen	39
13	Zusammenfassung und Ausblick	42
	Literaturverzeichnis	43

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 Sternentstehung im Carina-Nebel (NASA, ESA, M. Livio and the Hubble 20th Anniversary Team, 2019)	2
Abbildung 2 Harvard-Klassifikation der Spektraltypen der Sterne (Unsöld/Baschek 1991, S. 274)	6
Abbildung 3 Hertzsprung-Russel-Diagramm (Demtröder 2014, S. 338).....	7
Abbildung 4 Berliner Astronomische[s] Jahrbuch für 1784 (Mayer 1781, S. 183 – 186).....	11
Abbildung 5 Bewegung von Krüger 60 zwischen 1908 und 1920 durch das Teleskop des Yerkes Observatory (Karttunen 2017, S. 242)	13
Abbildung 6 Bewegung von Sirius (A) und dessen Begleitstern (B) am Sternenhimmel zwischen 1940 und 2000 (Weiprecht 2002)	14
Abbildung 7 Doppleraufspaltung der Spektrallinien bei spektroskopischen Doppelsternen (Demtröder 2014, S. 335)	15
Abbildung 8 Bedeckungsveränderliche Doppelsterne und ihre schematische Lichtkurve (Demtröder 2014, S. 336)	17
Abbildung 9 Enges Doppelsternsystem SR24 beobachtet durch das Subaru-Teleskop gegenüber der numerischen Simulation des Masseflusses zwischen den beiden Komponenten (Fischer 2010)	20
Abbildung 10 Probemasse zur Bestimmung der Roche-Grenze (Demtröder 2014, S. 370) ..	22
Abbildung 11 Potentialgebirge eines Doppelstern-systems mit Lagrange-Punkten (Müller 2007)	24
Abbildung 12 Untergruppen der engen Doppelsterne (Karttunen 2017, S. 275)	26
Abbildung 13 Künstlerische Darstellung des Akkretionsflusses von einem Begleitstern zu dessen schwarzen Loch (NASA 2013).....	28
Abbildung 14 Schwerpunkt- und Relativkoordinaten des Zweikörperproblems (Meschede 2015, S. 50).....	31
Abbildung 15 Laserinterferometer (Renyshaw GmbH 2020).....	41

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1 Charakteristische Umlaufzeiten verschiedener Typen von Doppelsternen (Weiprecht 2002)	18
---	----

1 Motivation

„Die Körper wären nicht schön, wenn sie sich nicht bewegten.“

Johannes Kepler (1571 – 1630)

Astronomen schätzen die Zahl der Sterne im Universum auf über 70 Trilliarden. Dabei kommt mindestens die Hälfte dieser unbegreiflichen Menge an Sterne des bekannten Universums in Doppel- oder Mehrfachsternsystemen vor. (vgl. Hanslmeier 2014, S. 285) Neben ihrer weiten Verbreitung sind Doppelsternsysteme für die Astronomie von besonderer Bedeutung und stellen beispielsweise bei der Bestimmung von Sternenmassen eine äußerst wichtige Informationsquelle dar. (vgl. Demtröder 2014, S. 333) Um das Phänomen der Doppelsterne und deren Dynamik näher zu beleuchten bietet es sich an, zunächst einen Blick auf die Dynamik der Entstehung und Entwicklung von Sternen und deren Beobachtung im Allgemeinen zu werfen.

2 Sternentstehung

Sterne entstehen durch Kontraktion von Bereichen interstellarer Wolken, die aus Gas und Staub bestehen. (vgl. Hanslmeier 2014, S. 378) Erreichen diese einzelnen Kerne der fragmentierten Molekülwolke eine gewisse Masse so kann eine entsprechend hohe potenzielle Gravitationsenergie schlussendlich zu deren Kollaps führen. Auslöser für eine lokale Dichteerhöhung in der interstellaren Wolke kann beispielsweise eine Supernovaexplosion mit den daraus resultierenden gravitativen Stoßwellen sein. Ebenso können Bereiche innerhalb einer interstellaren Wolke durch den Einfluss von massereichen Sternen oder durch die Rotation von Doppelsternsystemen fragmentiert werden.

Die Kontraktion eines Teilbereichs einer solchen interstellaren Wolke mit der Masse M und der mittleren Dichte ρ geschieht, sofern der anziehende Gravitationsdruck die abstoßenden Drücke Gasdruck und Zentrifugaldruck übersteigt. Die thermische Energie sowie der Drehimpuls einer Molekülwolke stellen somit den entscheidenden Faktor für eine stabile interstellare Wolke dar. Nehmen die Rotation und die Temperatur der Wolke ab, so gerät das hydrostatische Gleichgewicht ins Wanken und der Gravitationsdruck kann in dichteren Teilbereichen der Molekülwolke einen Kollaps der Materie verursachen. Dieses Ereignis stellt den ersten und wichtigsten Schritt bei der Sternentstehung dar.



Abbildung 1 Sternentstehung im Carina-Nebel (NASA, ESA, M. Livio and the Hubble 20th Anniversary Team, 2019)

Unter Annahme einer statischen, nicht rotierenden interstellaren Wolke mit geringer Massendichte spielt der Drehimpuls keine Rolle mehr und die Wolke kann näherungsweise als ideales Gas durch die allgemeine Gasgleichung beschrieben werden:

$$(1) \quad p \cdot V = n \cdot k \cdot T$$

hieraus ergibt sich nach Umstellen und unter Einbezug der Gleichung für die *Massendichte* ρ

$$(2) \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{n \cdot A \cdot m_H}{V}$$

für den Gasdruck p_{Gas} der interstellaren Wolke

$$(3) \quad p_{\text{Gas}} = p = \frac{\rho}{A \cdot m_H} \cdot k \cdot T$$

mit

p	Druck
p_{Gas}	Gasdruck
V	Volumen
ρ	Massendichte
n	Zahl der Gasmoleküle
A	mittlere atomare Massenzahl
k	Boltzmann-Konstante $\left(1,381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}\right)$
m_H	Masse eines H-Atoms ($\sim 1u$)
T	Temperatur.

Die mittlere atomare Massenzahl berechnet sich anteilig aus allen Atomen und Molekülen der interstellaren Wolke. Für eine Wolke aus 80% H-Atomen und 20% He-Atomen wäre die mittlere atomare Massenzahl beispielsweise $A=0,8 \cdot 1 + 0,2 \cdot 4 = 1,6$. Hieraus berechnet sich für dieses Beispiel die Masse des einzelnen Gasmoleküls μ zu

$$(4) \quad \begin{aligned} \mu &= A \cdot m_H = 1,6 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ &= 2,658 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

Die Mehrheit der interstellaren Wolken besteht zu 70% aus Wasserstoffmolekülen, während der Anteil an interstellarem Staub in Form von beispielsweise Graphit- und Silikateilchen in etwa 1% beträgt.

Der anziehende Gravitationsdruck lässt sich für eine kugelförmige interstellare Wolke mit Radius R und als konstant angenommener Dichte ρ innerhalb der Struktur mithilfe der Schwerebeschleunigung g nur in Abhängigkeit der Tiefe bzw. der Höhe über deren Schwerpunkt $R-r$ berechnen:

$$(5) \quad p_{\text{grav}}(h) = \int_0^h \rho \cdot g(R-r) dr.$$

Der Ortsfaktor $g(r)$ in einer bestimmten Höhe über dem Schwerpunkt folgt aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz

$$(6) \quad g(r) = G \cdot \frac{M(r)}{r^2} = G \cdot \frac{M \cdot r}{R^3} = \rho \cdot r \cdot \frac{4\pi \cdot G}{3}.$$

Hierbei stellt $M(r)$ die Masse dar, die in einer konzentrischen Kugel mit dem Radius r innerhalb der kugelförmigen interstellaren Wolke eingeschlossen wird. Die Masse $M = M(R)$ hingegen gibt die Gesamtmasse der Wolke mit dem Radius R an.

Mit der Gleichung für das *allgemeine Kugelvolumen*

$$(7) \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

ergibt sich für den Gravitationsdruck im Zentrum der interstellaren Wolke demnach:

$$(8) \quad p_{\text{grav}} = -\frac{3}{8} \frac{G \cdot M^2}{\pi \cdot R^4}$$

Die zuvor formulierte Voraussetzung für gravitative Instabilität einer rotationsfreien interstellaren Wolke lautet mathematisch ausgedrückt

$$(9) \quad p_{\text{gas}} + p_{\text{grav}} \leq 0$$

Der Gravitationsdruck besitzt aufgrund seiner Richtung nach innen ein negatives Vorzeichen.

Die Masse einer interstellaren Wolke beträgt in Abhängigkeit ihrer Massedichte der rein geometrischen Betrachtung als kugelförmig folgend

$$(10) \quad M = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \cdot \rho.$$

Aus der zuvor angegebenen Voraussetzung für gravitative Instabilität (*Gleichung 9*) lässt sich durch Einsetzen der Gleichungen für die beiden betrachtungsrelevanten Drücke Gasdruck nach außen (*Gleichung 3*) und Gravitationsdruck nach innen (*Gleichung 8*) einer gravitativ instabilen interstellaren Wolke mit dem Radius R das sogenannte Jeans-Kriterium formulieren:

$$\frac{\rho}{A \cdot m_H} \cdot k \cdot T - \frac{3 G \cdot M^2}{8 \pi \cdot R^4} \leq 0$$

Durch Einsetzen der Gleichung für die Masse des einzelnen Gasmoleküls aus *Gleichung 4* folgt:

$$\frac{\rho}{\mu} \cdot k \cdot T - \frac{3 G \cdot M^2}{8 \pi \cdot R^4} \leq 0.$$

Nach Substitution von ρ aus der hiernach um-gestellten *Gleichung 10*:

$$\frac{3M}{4\pi R^3 \mu} \cdot k \cdot T - \frac{3 G M^2}{8 \pi R^4} \leq 0$$

folgt schließlich das *Jeans-Kriterium*:

$$(11) \quad M \geq \frac{2 \cdot k \cdot T}{G \cdot \mu} \cdot R$$

Dem Jeans-Kriterium entsprechend müsste eine typische interstellare Wolke aus atomarem Wasserstoffgas eine Masse größer als 2000 Sonnenmassen haben, um genügend gravitativen Druck für ihren Kollaps zu besitzen. Um kollabieren zu können, müssen die Teilbereiche der interstellaren Wolke mit einer Jeans-Masse zudem kalt sein. (Demtröder 2014, S. 339)

Während des gravitativen Kollapses einer inter-stellaren Wolke steigt die Dichte und damit auch der Gasdruck an, während die potentielle (gravitative) Energie betragsmäßig größer wird. Solange die Dichte gering genug ist, kann die dabei freiwerdende Energie als

Strahlungsenergie nach außen abgegeben werden, ohne die Gaswolke dabei wesentlich aufzuwärmen. Es findet also in diesem Stadium eine isotherme Kontraktion statt, bei der die Dichte der Wolke zunimmt.

Da hierdurch die kritische Jeans-Masse sinkt, können bei räumlichen Dichteunterschieden einzelne Massezentren kollabieren. Dies ist der Grund, weshalb Sterne häufig nicht einzeln, sondern zeitgleich in sogenannten Sternhaufen entstehen. Wird die kollabierende Wolke zunehmend dichter, wärmt die entweichende Strahlung die Wolke auf und kann diese nicht mehr verlassen.

Sofern nun die Thermalisierungszeit, d. h. der mittlere Zeitabstand zwischen Stößen der Atome, im Vergleich zur Kollapszeit der Wolke kurz ist erfolgt die Aufheizung der Wolke adiabatisch, was einen Temperaturanstieg nach sich zieht. Dieser Temperaturanstieg verläuft im Inneren der Wolke aufgrund der erhöhten Dichte schneller als am Rand, sodass im Zentrum ein Gebiet hoher Temperatur und hohen Druckes entsteht.

Wenn sich Gas- und Gravitationsdruck kompensieren stellt sich ein Gleichgewicht und eine Stabilisierung des Zentralbereiches ein. Auf diesen zentralen Bereich prallen nun die durch die Gravitation quasi frei fallenden Atome aus dem noch isothermen Mantel und treiben die Aufheizung weiter voran. Hierdurch steigt der Gasdruck erneut und die kleinste Jean-Masse, die noch kollabieren kann, ist in der Größenordnung der Sonnenmasse.

Je nach Größe und Temperatur besitzen die Wolkenfragmente Massen von dem 0,1- bis 50-fachen der Sonnenmasse. Dies entspricht bereits dem Massenbereich beobachteter Sterne. Diese nun entstandenen annähernd kugelförmigen Ansammlungen aus interstellarem Staub mit genügend hohen Dichten zur Absorption der bei der Kontraktion erzeugten Strahlung werden Protosterne genannt. (Demtröder 2014, S. 341) Erreichen der Druck und die Temperatur im Inneren des Sterns eine kritische Schwelle, so beginnt die Kernfusion von Wasserstoff- zu Heliumatomen, das sogenannte Wasserstoffbrennen. 90% aller Sterne befinden sich in diesem Stadium und damit auf der Hauptreihe des Hertzsprung-Russel-Diagramms.

3 Hertzsprung-Russel-Diagramm

Alle Sterne des Universums zeigen bei spektraler Zerlegung - ebenso wie die Sonne - ein kontinuierliches Spektrum, das von dunklen Absorptionslinien und hellen Emissionslinien überlagert ist. Die spektrale Verteilung des Kontinuums hängt von der Oberflächentemperatur des Sterns und von der Dicke der das Kontinuum emittierenden Oberflächenschicht (Photosphäre) ab. (vgl. Demtröder 2014, S. 336)

Die Absorptionslinien, auch nach deren Entdecker als Fraunhofer-Linien bezeichnet, werden durch Übergänge in Atomen und Molekülen erzeugt, deren Temperatur tiefer ist als die Kontinuumsstrahlung.

Die hellen Emissionslinien entstammen heißen Atomen oder Ionen, die sich meist in den äußeren Schichten der Sterne befinden.

Das diskrete Absorptions- bzw. Emissionsspektrum wird durch die chemische Zusammensetzung der Sternatmosphären bestimmt. (Demtröder 2014, S. 336) Am Harvard Observatorium wurden ab etwa 1890 Spektren von etwa 400.000 Sternen aufgenommen und klassifiziert. Basierend auf die Intensitätsverhältnisse wichtiger Absorptionslinien in den Sternenspektren wurde die Harvard-Klassifikation entwickelt und 1922 von der internationalen astronomischen Union (IAU) als Standard anerkannt. Die Harvard-Klassifikation ist mit dem Spektraltyp, der entsprechenden Temperatur und den Klassifizierungskriterien in *Abbildung 2* dargestellt.

Spektraltyp	T/K	Klassifikationskriterien
O	50 000	Linien hochionisierter Atome: He II, Si IV, N III ... ; Wasserstoff H relativ schwach; gelegentlich Emissionslinien.
B0	25 000	He II fehlt; He I schwach; Si III, O II; H stärker.
A0	10 000	He I fehlt; H im Maximum; Mg II, Si II stark; Fe II, Ti II schwach, Ca II schwach.
F0	7600	H schwächer; Ca II stark; die ionisierten Metalle, z. B. Fe II, Ti II hatten ihr Maximum bei $\sim A5$; die neutralen Metalle, z. B. Fe I, Ca I erreichen nun etwa die gleiche Stärke.
G0	6000	Ca II sehr stark; neutrale Metalle Fe I ... stark.
K0	5100	H relativ schwach, neutrale Atomlinien stark; Molekülbanden.
M0	3600	Neutrale Atomlinien, z. B. Ca I sehr stark; TiO-Banden.
M5	3000	Ca I sehr stark, TiO-Banden stärker.
C	3000	Starke CN-, CH-, C ₂ -Banden; TiO fehlt; neutrale Metalle wie bei K und M.
S	3000	Starke ZrO-, YO-, LaO-Banden; neutrale Atome, wie bei K und M.

Abbildung 2 Harvard-Klassifikation der Spektraltypen der Sterne (Unsöld/Baschek 1991, S. 274)

Die Spektraltypen werden mit Großbuchstaben in Reihenfolge sinkender Temperaturen bezeichnet:

O – B – A – F – G – K – M.

Im Zeitraum von 1910 bis 1913 fanden der dänische Astronom Ejnar Hertzsprung und der amerikanische Astronom Henry Norris Russel durch den Vergleich vieler Sternspektren einen systematischen Zusammenhang zwischen dem Spektraltyp und der absoluten Helligkeit eines Sterns.

Dieser Zusammenhang kann in einem, nach dessen beiden Entdeckern benannten, Hertzsprung-Russel-Diagramm (HRD) dargestellt werden. Zumeist wird dabei die absolute Helligkeit M_V der Oberflächentemperatur T_{Oberfl} der Sterne in Kelvin gegenübergestellt. (siehe *Abbildung 3*)

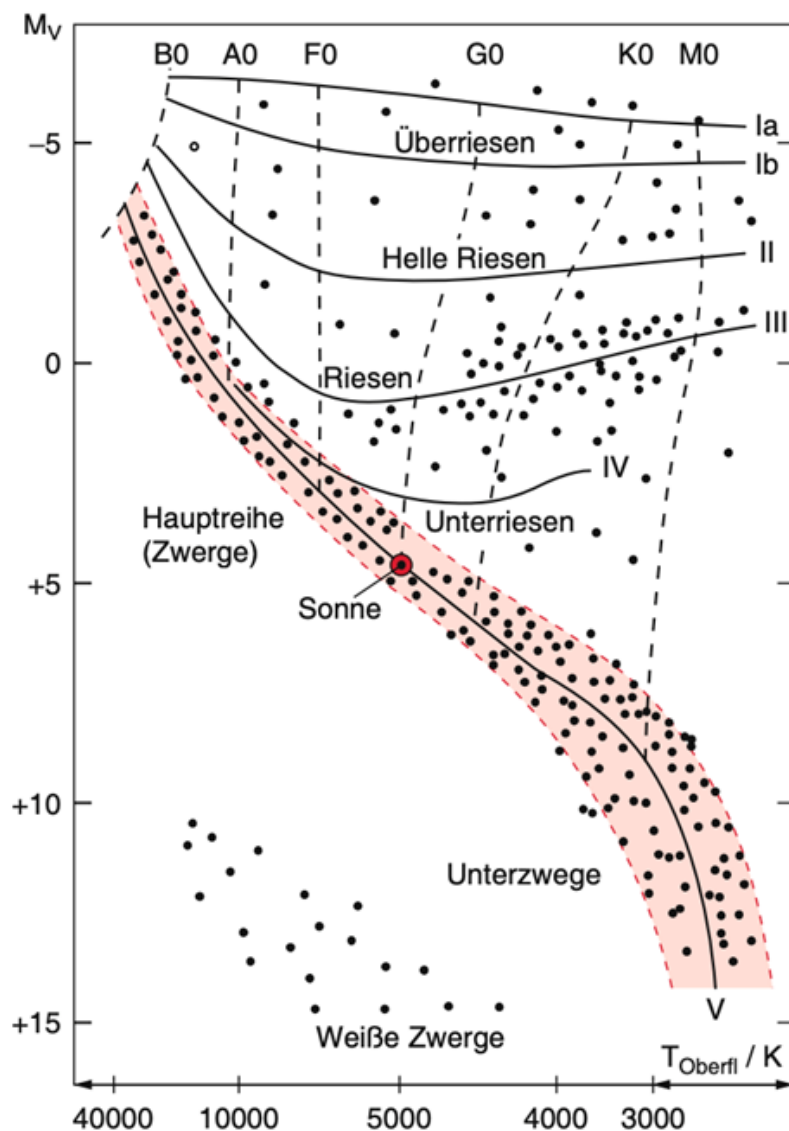


Abbildung 3 Hertzsprung-Russel-Diagramm (Demtröder 2014, S. 338)

In dem Diagramm ist zunächst die sogenannte Hauptreihe zu erkennen (farblich markiert, siehe *Abbildung 3*), auf der sich ein Großteil der Sterne befindet. Hauptreihensterne befinden sich in ihrer stabilen Brennphase, hier ist auch die Sonne einzuordnen. Oberhalb der Hauptreihe befinden sich in drei Bereichen die sogenannten Riesensterne, deren Radien deutlich größer sind als der Sonnenradius. Links unterhalb der Hauptreihe befinden sich die sogenannten weißen und braunen Zwerge, die bedeutend kleiner als die Sonne sind.

Die Sterne werden in verschiedene Leuchtkraftklassen eingeteilt:

0	Extrem leuchtkräftige Super-Überriesen
Ia	Überriesen mit großer Leuchtkraft
Ib	Überriesen mit geringer Leuchtkraft
II	Riesen mit großer Leuchtkraft
III	Normale Riesen
IV	Unterriesen
V	Hauptreihensterne (Zwergsterne)
VI	Untertzwerge.

Im Bereich oberhalb der Hauptreihe existiert des Weiteren eine Reihe helligkeitsveränderlicher Sterne. Diese stellen instabile Übergangsphasen der Sterne dar. Für die stabilen Hauptreihensterne existiert eine Relation zwischen der Masse M und der Leuchtkraft L des Sterns. Diese als *Masse-Leuchtkraft-Funktion* bezeichnete Relation wurde 1926 von dem britischen Astrophysiker Sir Arthur Stanley Eddington empirisch bestimmt und lautet:

$$(12) \quad L \sim M^{3,5}.$$

Dies bedeutet anschaulich, dass ein Hauptreihenstern der doppelten Sonnenmasse deren 11,3-fache Leuchtkraft besitzt; Bei vierfacher Sonnenmasse dementsprechend eine Leuchtkraft von 128 Sonnen. Entscheidend für die Dauer t_{HR} des Hauptreihenstadiums eines Sterns sind dessen Energievorrat in Form von Masse m und dessen Energieverbrauch in Form von Leuchtkraft L :

$$(13) \quad t_{HR} \sim \frac{M}{L}$$

Unter Einbezug der empirischen Masse-Leuchtkraft-Beziehung von Eddington (*Gleichung 12*) ergibt sich die Dauer des Hauptreihenstadiums zu:

$$(14) \quad t_{HR} \sim \frac{1}{M^{2,5}}.$$

Für die Sonne wird die Dauer des stabilen Wasserstoffbrennens auf 7 Milliarden Jahre geschätzt, wodurch sich für die Dauer in Jahren $[a]$ des Hauptreihenstadiums eines beliebigen Sterns mit einem Vielfachen des Sonnengewichts M_{\odot} folgender Zusammenhang formulieren lässt:

$$(15) \quad t_{HR} \approx 7 \cdot 10^9 a \cdot (M_{\odot})^{-2}.$$

Es lässt sich aus dieser Formel schlussfolgern, dass massereiche Sterne eine sehr viel kürzere Verweildauer auf der Hauptreihe haben als masseärmere Sterne, da deren Kernbrennstoff entsprechend der höheren Leuchtkraft deutlich schneller verbraucht wird. Dies erklärt auch, weshalb O- und B-Sterne sehr selten, K- und M-Sterne jedoch sehr häufig vorkommen. Auf Riesensterne oder braune Zwerge ist diese Relation nicht übertragbar.

Des Weiteren existiert für Hauptreihensterne ein Zusammenhang zwischen deren Masse M in Sonnenmassen M_{\odot} und deren Radius R in Sonnenradien R_{\odot} :

$$(16) \quad \frac{R}{R_{\odot}} = 1,06 \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{0,945}$$

für Sterne mit einer Masse $M < 1,66M_{\odot}$,

bzw.

$$(17) \quad \frac{R}{R_{\odot}} = 1,33 \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{0,555}$$

für Sterne mit einer Masse $M > 1,66M_{\odot}$.

Diese Zusammenhänge wurden empirisch ermittelt und zeigen die inkonstante durchschnittliche Massedichte der Sterne untereinander. Die Masse ist der entscheidende Faktor für die Lebensdauer von Sternen.

Für deren zeitliche Entwicklung ist entscheidend, wie der Energietransport vor sich geht. Während dieser bei Sternen mit Massen über der 1,5-fachen Sonnenmasse im Zentralbereich konvektiv und weiter außen durch Strahlung vonstattengeht, so ist dies bei Sternen mit einer kleineren Masse genau umgekehrt der Fall. (vgl. Lerner 2000, S. 165)

Der Gravitationsdruck der Sternmaterie bestimmt den Betrag der Energieerzeugung und damit die Lage des hydrostatischen Gleichgewichts aus Gas- und Strahlungsdruck, welches den Sternradius bestimmt.

Massereiche Sterne durchlaufen die Entwicklung vom Wasserstoffbrennen bis hin zur Helium-Kernfusion deutlich schneller als Sterne mit einem Gewicht kleiner der 1,5-fachen Sonnenmasse. Während massearmen Sternen zumeist schon nach dem Heliumbrennen „die Energie ausgeht“ und sie nach einem letzten Aufblähen als roter Riese zu einem weißen Zwerg mit planetarem Nebel verkümmern, können massereiche Sterne Elemente höherer Ordnung fusionieren, in Extremfällen bis hin zur Eisen-Kernfusion. Die Fusionsprozesse verlaufen dabei

immer schneller aufeinander folgend, bis die größten Hauptreihensterne zu Neutronensternen kollabieren oder nach einer Supernova Explosion ein schwarzes Loch entsteht.

Da die meisten Sterne nicht alleine sondern als Teil eines Sternenhaufens entstehen, scheint es naheliegend, dass die Sternentwicklung teils auch von den Wechselwirkungen zwischen den Sternen abhängt. Besonders gravierend können diese Beeinflussungen in Doppelsystemen sein.

4 Geschichte der Doppelstern-Beobachtung

Auch wenn in der Antike bereits einige Doppelsterne bekannt waren, so beginnt die eigentliche Ära der Doppelsternbeobachtung mit der Erfindung des Fernrohrs. So beobachtete der italienische Gelehrte Galileo Galilei bereits 1617 nahe des Hauptsterns von Theta Orionis, einem durch vier Sterne aufgespannten Trapez im Orionnebel, zwei weitere schwächere Sterne. Diese waren gleichsam dunkler als der Hauptstern und befanden sich in gleichem Abstand zu diesem, der so gering war, dass sich die Sterne aus Sicht Galileis praktisch berührten. (vgl. Schlimmer 2018) Um 1650 beobachtete der italienische Astronom Giovanni Battista Riccioli den Stern Mizar, der gemeinsam mit dem Stern Alkor schon seit der Antike als optischer Doppelstern bekannt war. Durch das Teleskop erkannte Riccioli, dass Mizar eigentlich aus zwei Sternen besteht. (vgl. Schlimmer 2018)

Die systematische Suche und Beobachtung der Doppelsterne wurden vom deutschen Physiker und Astronom Christian Mayer begonnen. Bei der Beobachtung heller Fixsterne zur Untersuchung deren Eigenbewegung wurde der Astronom auf schwächere Sterne in der unmittelbaren Nähe dieser hellen Sterne aufmerksam, die bis zu diesem Zeitpunkt in keinem Sternregister aufgeführt wurden. So veröffentlichte Mayer 1779 eine Tabelle mit 72 von ihm entdeckten Doppelsternen (siehe *Abbildung 4*).

Zwei Jahre später wurde diese Tabelle um acht weitere Doppelsterne ergänzt und im „Berliner Astronomische[n] Jahrbuch für 1784“ veröffentlicht. Zu diesem Zeitpunkt war Mayer bereits von einer gravitativen Zusammengehörigkeit dieser neuen Sternsysteme überzeugt. (vgl. Schlimmer 2018)

Durch die Veröffentlichungen im „Berliner Astronomische[n] Jahrbuch für 1784“ angeregt begann der deutsch-britische Astronom Friedrich Wilhelm Herschel ab 1779 mit der Suche nach einem geeigneten Kandidaten für die Parallaxe-Bestimmung. 1782 veröffentlichte Herschel einen ersten Doppelstern Katalog mit insgesamt 269 Doppel- und Mehrfachsternsystemen. Durch seine Forschung kam Herschel 1804 zu der Schlussfolgerung, „dass es eigene

Sternsysteme gibt, die aus 2 Fixsternen bestehen, von welchen der eine sich in einer regelmäßigen Bahn um den anderen bewege". (Herschel 1804)

Für diese physischen Doppelsterne prägte Herschel den Begriff „binary stars“ während er die optischen Doppelsterne als „double stars“ bezeichnete.

Die Parallaxe-Forschung wurde im Laufe der Jahre bis 1838 von den deutschen Astronomen Friedrich Georg Wilhelm Struve und Johann Heinrich von Mädler in Dorpat weitergeführt und erste Umlaufbahnen für einige wenige Systeme berechnet. 1838 gelang dem deutschen Astronomen Friedrich Wilhelm Bessel erstmalig die genaue Bestimmung der Parallaxe eines Doppelsternsystems anhand des Sterns 61 Cygni. Anhand der Parallaxe, also der Relativbewegung des Doppelsterns gegen sehr viel weiter entfernte Sterne, konnte Bessel das heliozentrische Weltbild beweisen und erstmalig den Abstand eines Sterns von der Erde genau bestimmen.

In Amerika befasste sich parallel der Astronom Sherburne Wesley Burnham mit Doppelsternen und erarbeitete einen Katalog mit über 13.000 Doppel- und Mehrfachsternen, den er im Jahr 1906 veröffentlichte.

In der Gegenwart ist das US Naval Observatorium in Washington führend in der Doppelsternbeobachtung und verwaltet einen Katalog von über 152.000 Doppelsternen basierend auf knapp 2 Millionen Messwerten (Stand Juli 2020), den sogenannten „Washington Double Star Catalog“. Dieser wird der Öffentlichkeit kostenlos im Internet zur Verfügung gestellt.

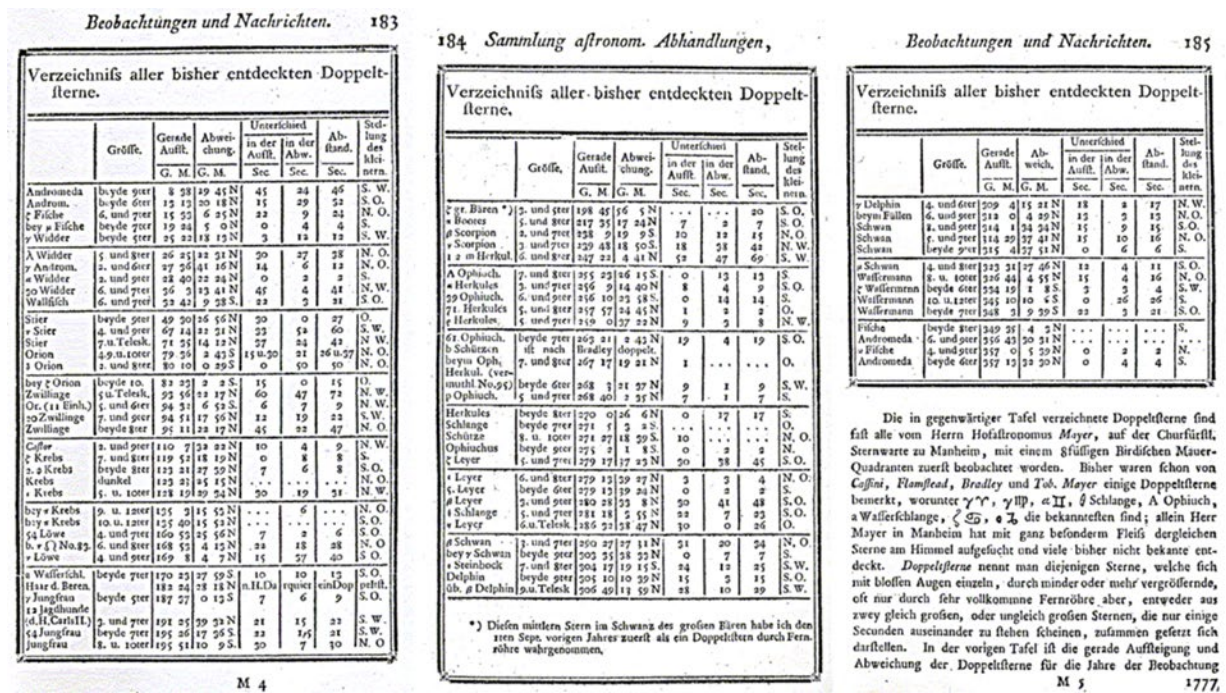


Abbildung 4 Berliner Astronomische[s] Jahrbuch für 1784 (Mayer 1781, S. 183 – 186)

2016 wurde mittels des Volunteer-Computing-Forschungsprojekts Einstein@home erstmalig ein aus zwei Neutronensternen bestehender Doppelstern entdeckt.

5 Beobachtung und Klassifizierung von Doppelsternen

Oft erscheinen Sterne bei der Beobachtung des Nachthimmels durch ein Teleskop an der Sphäre eng benachbart. Meistens befinden sich diese „Sternenpaare“ jedoch räumlich in Beobachtungsrichtung unterschiedlich weit vom Beobachter entfernt. Solche nur scheinbar benachbarten Sterne werden als optische Doppelsterne bezeichnet.

Ein tatsächliches Sternenpaar wird hingegen allgemein als physischer Doppelstern bezeichnet. Physische Doppelsterne können anhand der Beobachtungsmethode, durch die sie als Doppelsterne identifiziert werden können, klassifiziert werden:

Visuelle Doppelsterne

Der Winkelabstand von visuellen Doppelsternen ist groß genug, um sie mithilfe optischer Mittel wie etwa einem Teleskop von der Erde aus getrennt wahrnehmen zu können. Durch genaueste Mikrometermessungen können ihre Distanz in Bogensekunden [“] und ihr Positionswinkel in Grad [°] als Zeitfunktion angegeben werden.

Der Nullpunkt des Koordinatensystems muss bei dieser Bestimmungsmethode in den helleren (massereicheren) Stern gelegt werden.

Der durch Beugung begrenzte minimale Winkel φ (im Bogenmaß) zwischen zwei Objekten, die in einem Teleskop mit dem Öffnungsdurchmesser D optisch bei der Wellenlänge λ noch unterschieden werden können, ist durch folgenden empirischen Zusammenhang gegeben:

Der durch Beugung begrenzte minimale Winkel φ (im Bogenmaß) zwischen zwei Objekten, die in einem Teleskop mit dem Öffnungsdurchmesser D optisch bei der Wellenlänge λ noch unterschieden werden können, ist durch folgenden empirischen Zusammenhang gegeben:

$$(18) \quad \varphi = \sin^{-1} \left(1,22 \frac{\lambda}{D} \right)$$

Für erdgebundene Teleskope ist dieser minimale Auflösungswinkel jedoch zumeist nur theoretisch erreichbar, da Luftturbulenzen in der Regel das Auflösungsvermögen begrenzen

Abhängig von dem verwendeten Teleskop und der Stärke der Turbulenz der Atmosphäre können unter Idealbedingungen Einzelsterne eines visuellen Doppelsternsystems von der Erde aus bis zu einem Abstand von $0,1''$ zueinander bestimmt werden. (vgl. Weiprecht 2002)

Das Hubble-Weltraumteleskop erreicht aufgrund des Wegfalls der atmosphärischen Einflüsse eine Auflösung von $0,05''$. Dagegen erreicht es nicht die Helligkeitsauflösung der größeren erdgebundenen Teleskope.

Auf der Erde lassen sich durch zusammenschaltete Teleskope mithilfe der sogenannten Interferometrie Bilder mit einer Auflösung berechnen, die dem Abstand der Teleskope zueinander entspricht.

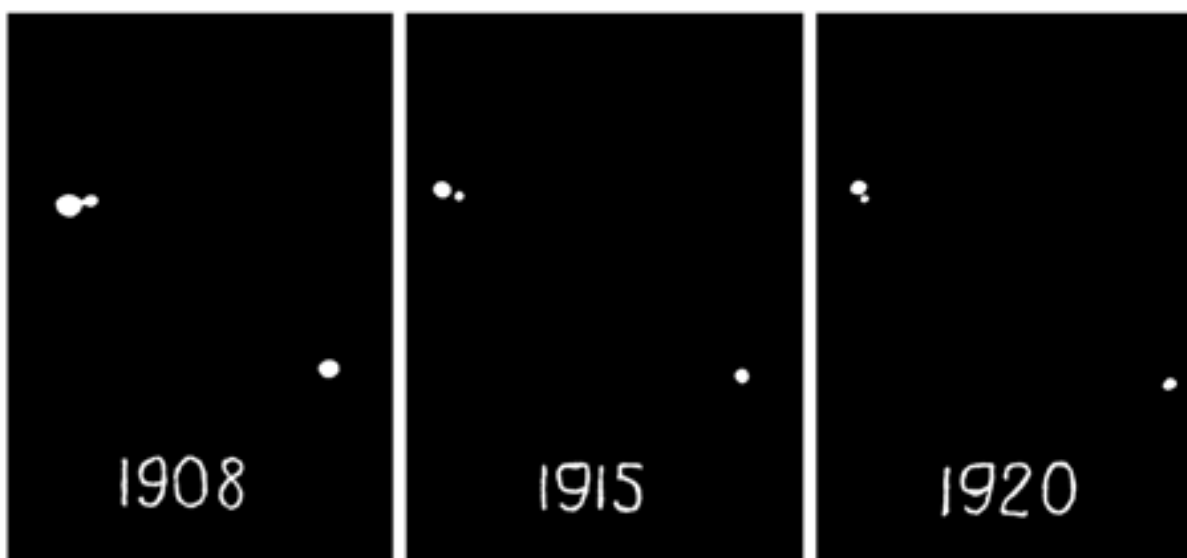


Abbildung 5 Bewegung von Krüger 60 zwischen 1908 und 1920 durch das Teleskop des Yerkes Observatory (Karttunen 2017, S. 242)

Astrometrische Doppelsterne

Diese Art von Doppelsternen erscheint visuell am Himmel als ein Stern, es kann jedoch anhand dessen Bahn am Himmel darauf geschlossen werden, dass es sich eigentlich um ein Doppelsternsystem handelt. Die Bahn der beobachtbaren Komponente wird durch seinen Begleitstern gravitativ beeinflusst, sodass periodische Störungen in der Bahn nachweisbar sind.

Bereits 1844 beobachtete der deutsche Astronom Friedrich Wilhelm Bessel Anomalien in der Bewegung des Sterns Sirius, dessen Bewegung nicht streng geradlinig verlief, sondern einer flachen Sinuskurve mit einer Periodendauer von etwa 50 Jahren ähnelte. 1862 konnte der masseärmere Begleitstern des Sirius, der für diese Bewegung verantwortlich ist, erstmalig optisch beobachtet werden.

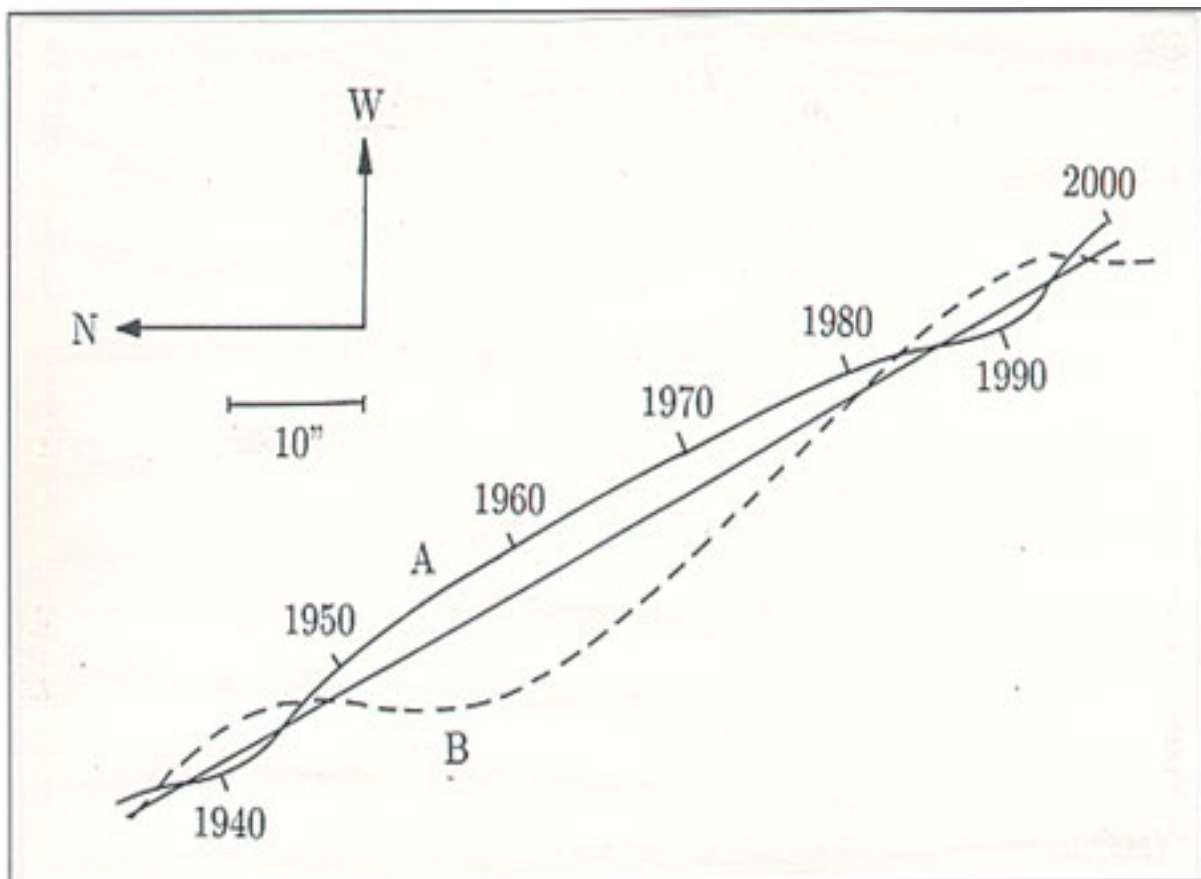


Abbildung 6 Bewegung von Sirius (A) und dessen Begleitstern (B) am Sternenhimmel zwischen 1940 und 2000 (Weiprecht 2002)

Spektroskopische Doppelsterne

Auch die spektroskopischen Doppelsterne erscheinen am Himmel als ein einzelner Stern. Durch die Analyse des Spektrums ist jedoch aufgrund von beobachtbaren entgegengesetzten Dopplerverschiebungen ihrer Spektrallinien darauf zu schließen, dass es sich um ein Doppelsystem handeln muss. Die Zerlegung der kontinuierlichen Strahlung eines Doppelsystems in dessen Spektrum geschieht zumeist durch einen Spektrografen.

Die Zerlegung des Lichts geschieht hierbei durch optische Elemente, die Dispersionseigenschaften besitzen, wie dies etwa bei Prismen oder Beugungsgittern der Fall ist. Detektiert werden die zerlegten Spektren heutzutage zumeist durch hochempfindliche CCD-Kamerasensorelemente oder Photodiodenzeilen, die auch in der Astrophotographie Verwendung finden.

Die Komponenten der Bahngeschwindigkeit beider Sterne des Systems in Richtung der Sichtlinie lassen sich durch den Abstand der sogenannten Doppler-Dubletts im Spektrum bestimmen.

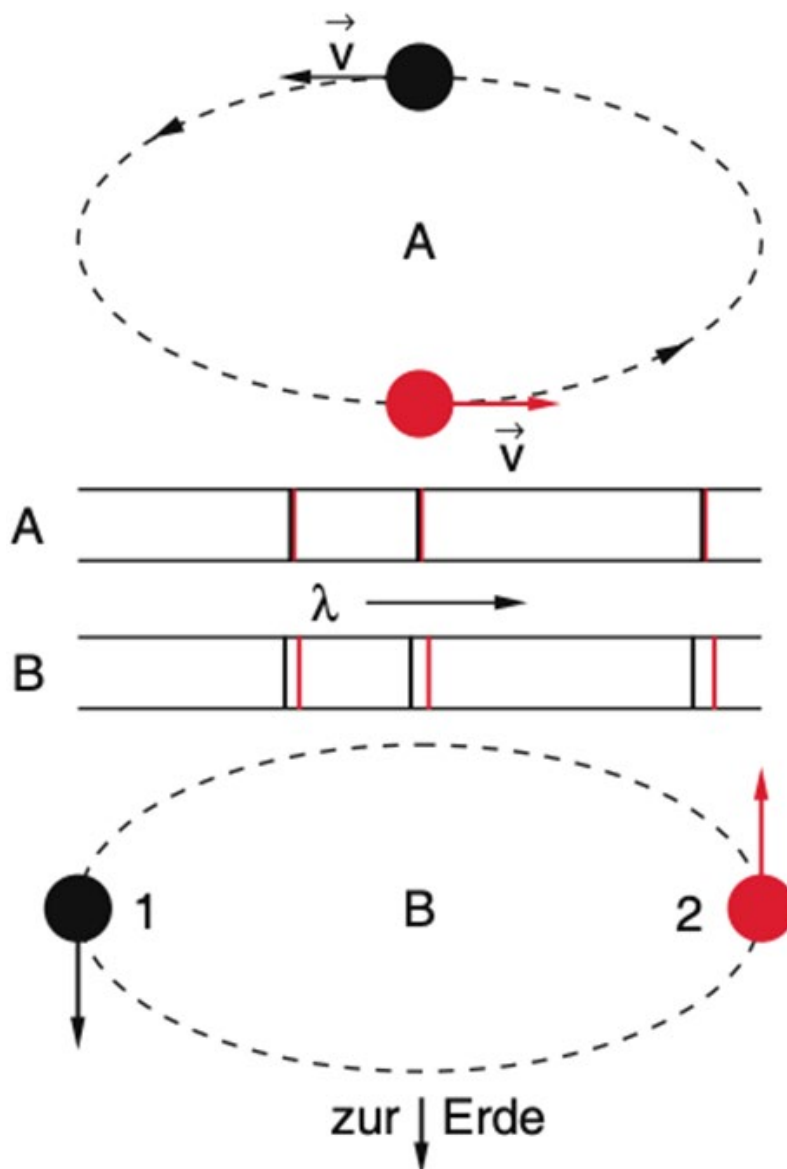


Abbildung 7 Doppleraufspaltung der Spektrallinien bei spektroskopischen Doppelsternen (Demtröder 2014, S. 335)

In Stellung A der *Abbildung 7* findet keine Dopplerverschiebung statt, da der Geschwindigkeitsvektor der beiden Sterne exakt senkrecht zur Sichtlinie der Erde steht. In Stellung B befinden sich diese Geschwindigkeitsvektoren parallel zur Sichtlinie, sodass für Stern 1 eine Blauverschiebung und für Stern 2 eine Rotverschiebung zu beobachten ist. Dies ist auf den Doppler-Effekt zurückzuführen, also die zeitliche Stauchung bzw. Dehnung der Lichtwellen aufgrund der Abstandsveränderung zwischen den Elementen des Doppelsternsystems und des Beobachters, was ein Auftreten von Doppler-Dubletts links und rechts der Hauptemissionslinie im Spektrum nach sich zieht.

Die Dopplerverschiebung $\Delta\lambda(t)$ aufgrund der Bewegung der beiden Sterne kann anhand einer Emissionslinie im Spektrum des Doppelsternsystems als sinusförmiger zeitlicher Verlauf in der Form

$$(19) \quad \Delta\lambda(t) = \Delta\lambda_0 \cdot \sin(\omega t)$$

mit einer Periode von $T = \frac{2\pi}{\omega}$ bestimmt werden.

Die Bahngeschwindigkeit v der beiden Komponenten kann ebenso aus der Dopplerverschiebung mithilfe der Lichtgeschwindigkeit c durch den Zusammenhang

$$(20) \quad \Delta\lambda = \Delta\lambda_0 \cdot \frac{v}{c}$$

berechnet werden. Der Abstand r_A der Komponente 1 bzw. r_B der Komponente 2 aus *Abbildung 7* vom gemeinsamen Schwerpunkt S berechnet sich zu:

$$(21) \quad r_A = \frac{v_B}{\omega} \text{ bzw. } r_B = \frac{v_A}{\omega} .$$

Photometrische Doppelsterne

(Bedeckungsveränderliche)

Diese Doppelsterne weisen eine Helligkeitsveränderung bzw. einen Helligkeitsabfall auf, wenn die Komponenten aneinander vorbeiziehen. Am Sternhimmel erscheinen auch Bedeckungsveränderliche als ein einzelner Stern. Photometrische Doppelsterne stellen eine Untergruppe der spektroskopischen Doppelsterne dar, bei der die Bahnebene in etwa mit der Sichtlinie der Beobachtung zusammenfällt. Aus diesen Sternen lassen sich beinahe alle Zustandsgrößen ableiten, da die Helligkeit des Systems mit der Periode der Umlaufzeit variiert. Trotzdem gaben die bedeckungsveränderlichen Doppelsterne den Astronomen lange ein Rätsel auf, bis 1782 der britische Astronom John Goodricke anhand des Doppelsterns Algol beweisen konnte, dass die Helligkeitsschwankungen periodisch waren und hundert Jahre später der deutsche Astronom Hermann Carl Vogel anhand der Dopplerverschiebung im Spektrum

nachweisen konnte, dass die Radialgeschwindigkeit von Algol sich mit derselben Periode ändert. (vgl. Demtröder 2014, S. 336)

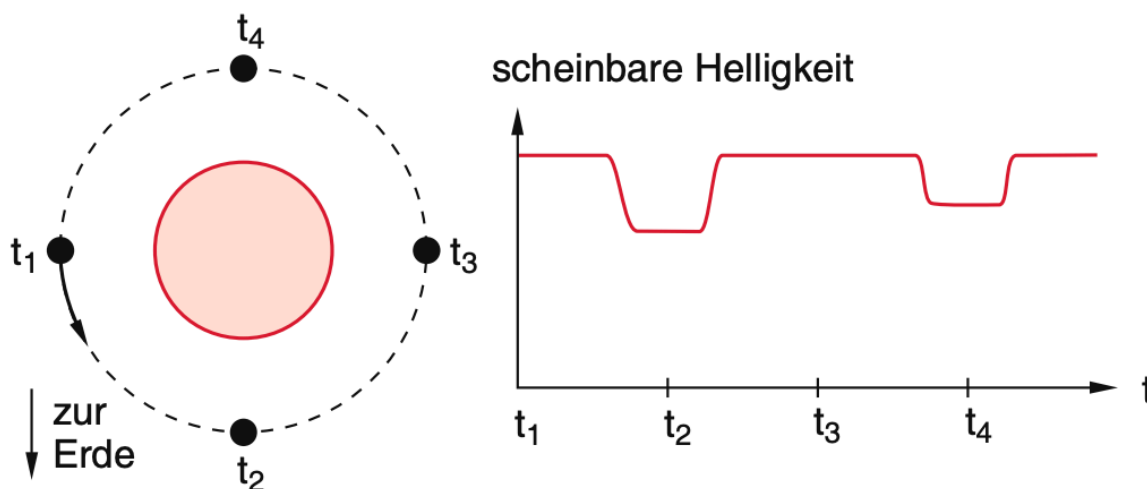


Abbildung 8 Bedeckungsveränderliche Doppelsterne und ihre schematische Lichtkurve (Demtröder 2014, S. 336)

In *Abbildung 8* ist zum Zeitpunkt t_2 und t_4 ein Helligkeitseinbruch zu erkennen. Anhand dieser Einbrüche kann das Verhältnis der Helligkeit der beiden Komponenten des Doppelsternsystems ermittelt werden. Aus dem Verlauf des Abfalls und Anstiegs der Helligkeitskurven lässt sich zudem das Verhältnis der Sternradien bestimmen. Bei Kenntnis der Bahngeschwindigkeiten der Komponenten lassen sich außerdem die beiden Bahnradien der Komponenten bestimmen.

Eine andere Klassifizierungsmöglichkeit von Doppelsternsystemen bietet ihre Umlaufzeit zueinander. Das dritte Kepler'sche Gesetz verknüpft den Abstand zweier sich umkreisender Objekte mit ihrer Umlaufzeit, anhand derer die Doppelsternsysteme ebenso unterschieden werden können. Die folgende *Tabelle 1* gibt eine Zusammenstellung typischer Umlaufzeiten von verschiedenen Doppelsternsystemen basierend auf empirischen Daten:

Tabelle 1 Charakteristische Umlaufzeiten verschiedener Typen von Doppelsternen (Weiprecht 2002)

Doppelsternotyp	Minimum	Mittel	Maximum
Visuell	1,7 a	76 a	10850 a
Spektroskopisch	80 min	2-50 d	20 a
Photometrisch	80 min	10 d	27 a

Einheiten: [a] = Jahr, [d] = Tag, [min] = Minute

6 Beispiele für verschiedene Doppelsternsystem

Sicherlich stellt sich die Frage, welche Arten der Hauptreihensterne aus dem Hertzsprung-Russel-Diagramm ein Doppelsternsystem bilden können. Prinzipiell scheinen alle denkbaren Kombinationen aus Sternen, Pulsaren, schwarzen Löchern und Planeten möglich zu sein. Die Häufigkeit der unterschiedlichen möglichen Doppel- und Mehrfachsystemen variiert jedoch.

Ein Beispiel für ein **Doppelsternsystem in einem Dreifachsternsystem** lässt sich im Sternbild Schwan finden. Der Hauptstern von HD 188753 ist ein gelber Zwerg, der womöglich von einem Planeten umkreist wird, der dem Planeten Jupiter des Sonnensystems ähnelt. Die beiden Begleiter des Hauptsterns sind zwei späte Hauptreihensterne, die ein sich gegenseitig umkreisendes Doppelsternsystem bilden, welches um den Hauptstern kreist. Diese Umlaufbahn um den Hauptstern erstreckt sich in einem Abstand von 6 AE bis 15 AE am entferntesten Punkt. Die Bahnperiode des Systems wurde zu 25,6 Jahren bestimmt. (Marcadon et al. 2018, S. 4)

Die Existenz eines **Doppel-Pulsars** konnte 1974 durch die US-amerikanischen Astrophysiker Russell Alan Hulse und Joseph Taylor nachgewiesen werden. Das nach seinen Entdeckern auch Hulse-Taylor-Doppelpulsar genannte Doppelsternsystem befindet sich im Sternbild Adler in 21.000 Lichtjahren Entfernung von der Erde. Beide Neutronensterne besitzen eine durchschnittliche Masse von 1,4 Sonnenmassen und umkreisen den gemeinsamen Schwerpunkt innerhalb von 7,75 h in einem Abstand von 1,1 AE bis 4,8 AE. Der Umlauf der beiden Pulsare verursacht eine nichtsphärische Verschiebung der Massendichten, was gemäß der

Relativitätstheorie eine Abstrahlung von Gravitationsenergie in Form von Gravitationswellen verursacht. Hulse und Taylor konnten dies anhand der Verringerung des Abstands der großen Halbachse der beiden Sterne um 3,5 m pro Jahr erstmals beweisen. 1984 wurde die Verlustrate der Orbitumlauftzeit offiziell mit $-(2,40 \pm 0,09) \cdot 10^{-12}$ Sekunden pro Sekunde angegeben, was zu $99,7 \pm 0,2$ % mit den theoretischen Voraussagen der allgemeinen Relativitätstheorie übereinstimmte. (Weisberg et al. 2002)

OJ 287 ist ein 3,5 Milliarden Lichtjahre entferntes Doppelsternsystem, welches aus **zwei schwarzen Löchern** besteht, die sich in einem Zeitraum von 12 Jahren umlaufen. Das größere der beiden schwarzen Löcher ist mit 18 Milliarden Sonnenmassen eines der massereichsten bekannten schwarzen Löcher des Universums, während sein Begleiter immerhin eine Masse von 100 Millionen Sonnenmassen besitzt. Während eines Umlaufs des kleineren schwarzen Lochs um seinen massereicheren Partner durchdringt dieses dessen Akkretionsscheibe je kurz vor und kurz nach der dichtesten Annäherung, was heftige Gaseruptionen auslöst, die messbare Helligkeitsveränderungen erzeugen. Aufgrund der Freisetzung von Gravitationswellen verkleinert sich der Orbit der beiden Partner stetig. Unter Berücksichtigung dieses Effekts konnten Wissenschaftler 2007 die periodische Helligkeitsveränderung mit einer Genauigkeit von sechs Stunden vorhersagen. Die Vereinigung der beiden schwarzen Löcher wird aufgrund des enormen Energieverlusts durch die Erzeugung der Gravitationswellen bereits in 10.000 Jahren erwartet, obwohl der Abstand ihrer Massezentren zueinander 1,5 Lichtjahre beträgt. (vgl. Hattenbach 2015)

7 Dynamik und Stabilität von Mehrfachsternsystemen

Hierarchische Systeme

Hierarchische Mehrkörpersysteme wie beispielsweise das bereits erwähnte Dreifachsternsystem HD 188753 befinden sich zumeist in einer stabilen Konfiguration.

Der Doppelstern innerhalb des Dreifachsternsystems kann als physikalisches Zweikörperproblem betrachtet werden und die Wechselwirkungen zwischen den Sternen und ihren Bahnen sind gering.

Offene Sternhaufen

Ein offener Sternhaufen ist beispielsweise beim sogenannten „Trapez-System“ im Sternbild Orion zu finden. Hier existiert keine Schachtelung der Mehrfachsterne und es gibt starke

Wechselwirkungen zwischen allen Sternen und deren chaotischen Bahnen. Es handelt sich physikalisch um ein Vielkörperproblem mit n Körpern.

Enge Doppelsterne

Besonders interessant für die Betrachtung der Dynamik und Stabilität sind sogenannte enge Doppelsternsysteme. „Eng“ kann sicherlich vielerlei Bedeutungen haben, die im Ermessen des Betrachters liegen können, die Definition von „eng“ lässt sich in Bezug auf Doppelsterne jedoch in zwei Bedeutungen einteilen (Beuther 2009, S.12):

- Geometrisch „eng“, d.h. der Abstand des Sternenpaares liegt in der Größenordnung der Sternradien
- „Eng“ wechselwirkend, d.h. das Sternenpaar beeinflusst sich gegenseitig bei der Entwicklung, sodass die Entwicklung der Einzelkomponenten vom Standardentwicklungsschema entsprechender Einzelsterne abweicht. Mögliche Wechselwirkungsprozesse können dabei z.B. Massenaustausch, Magnetfelder, Gezeiten- und Fliehkräfte oder gegenseitige Bestrahlung sein.

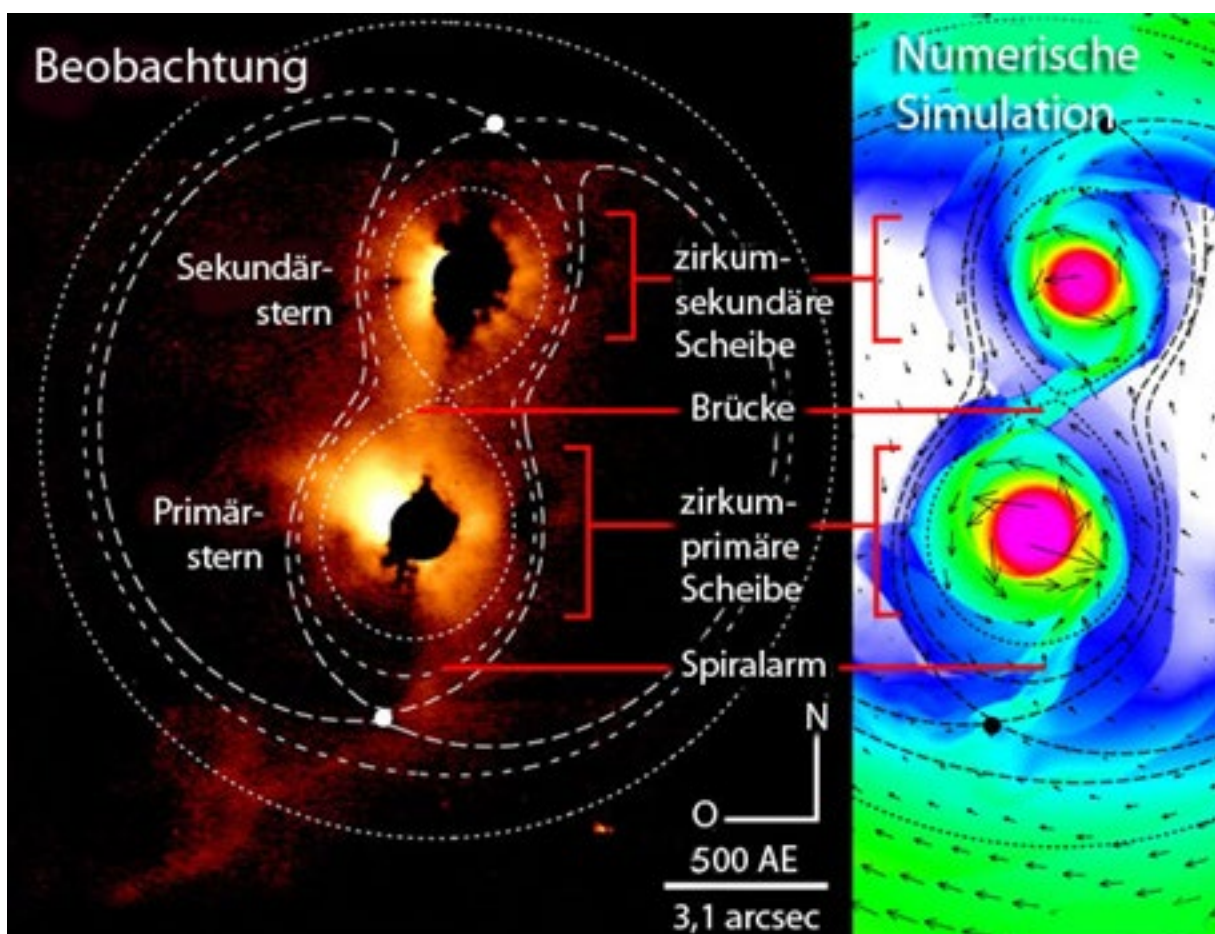


Abbildung 9 Enges Doppelsternsystem SR24 beobachtet durch das Subaru-Teleskop gegenüber der numerischen Simulation des Masseflusses zwischen den beiden Komponenten (Fischer 2010)

Enge Doppelsterne können in eine Konfiguration geraten, in der ein Massenfluss von einer Komponente zur anderen entsteht. Ein Stern „saugt“ den Anderen quasi aus.

In *Abbildung 9* ist dieses Phänomen dargestellt. Es handelt sich hierbei um ein Bild des engen Doppelsternsystems SR24, welches erstmals 2010 mithilfe des japanischen Subaru-Teleskops aufgenommen werden konnte. Die Aufnahme erfolgte im nahen infraroten Bereich des Spektrums. Das Auflösungsvermögen des Spiegels mit 8,4 Metern Durchmesser wurde dabei zusätzlich durch eine adaptive Optik verbessert und beträgt 0,1 Bogensekunden. Dadurch können die beiden Materiescheiben um die Sterne sowie die Materiebrücke zwischen ihnen sichtbar gemacht werden, auch wenn das Doppelsternsystem 520 Lichtjahre von der Erde entfernt ist. In *Abbildung 9* ist die zugehörige numerische Simulation des Doppelsternsystems dargestellt, welches sich sehr gut mit dem Bildmaterial des Teleskops deckt.

8 Roche-Grenze und Massefluss zwischen engen Doppelsternen

Ob ein solcher Massefluss zwischen den Komponenten eines engen Doppelsternsystems entsteht, kann mithilfe der sogenannten Roche-Grenze bestimmt werden.

Gegenstand der folgenden Betrachtung soll ein Doppelsternsystem bestehend aus zwei Sternen der Massen M_1 und M_2 sein, die eng mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den gemeinsamen Schwerpunkt S kreisen.

Ein solches Doppelsternsystem ist in *Abbildung 10* skizziert. Die vertikale Achse verläuft hierbei durch den Schwerpunkt, um den sich beide Komponenten mit der Winkelgeschwindigkeit ω drehen.

Die Abstände a_1 bzw. a_2 der beiden Massezentren vom Schwerpunkt sind reziprok proportional zu dem Masseverhältnis der beiden Komponenten:

$$(22) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1}$$

Aus der Bedingung, dass im stabilen Gleichgewicht der Komponenten die Gravitationskraft betragsmäßig der Zentrifugalkraft entspricht, gilt für die Winkelgeschwindigkeit das *dritte Kepler'sche Gesetz*:

$$(23) \quad \omega^2 = \frac{G \cdot (M_1 + M_2)}{a^3}$$

Dabei ist $a = a_1 + a_2$ die große Halbachse des Doppelsternsystems (siehe *Abbildung 10*).

Der Radius der Masse M_i sei dabei R_i . Betrachtet wird nun eine Probemasse m , die in das Zweimassensystem mit den Abständen r_i von den Mittelpunkten der Massen M_1 und M_2 eingeführt wird. Dies ist in *Abbildung 10* ebenso dargestellt.

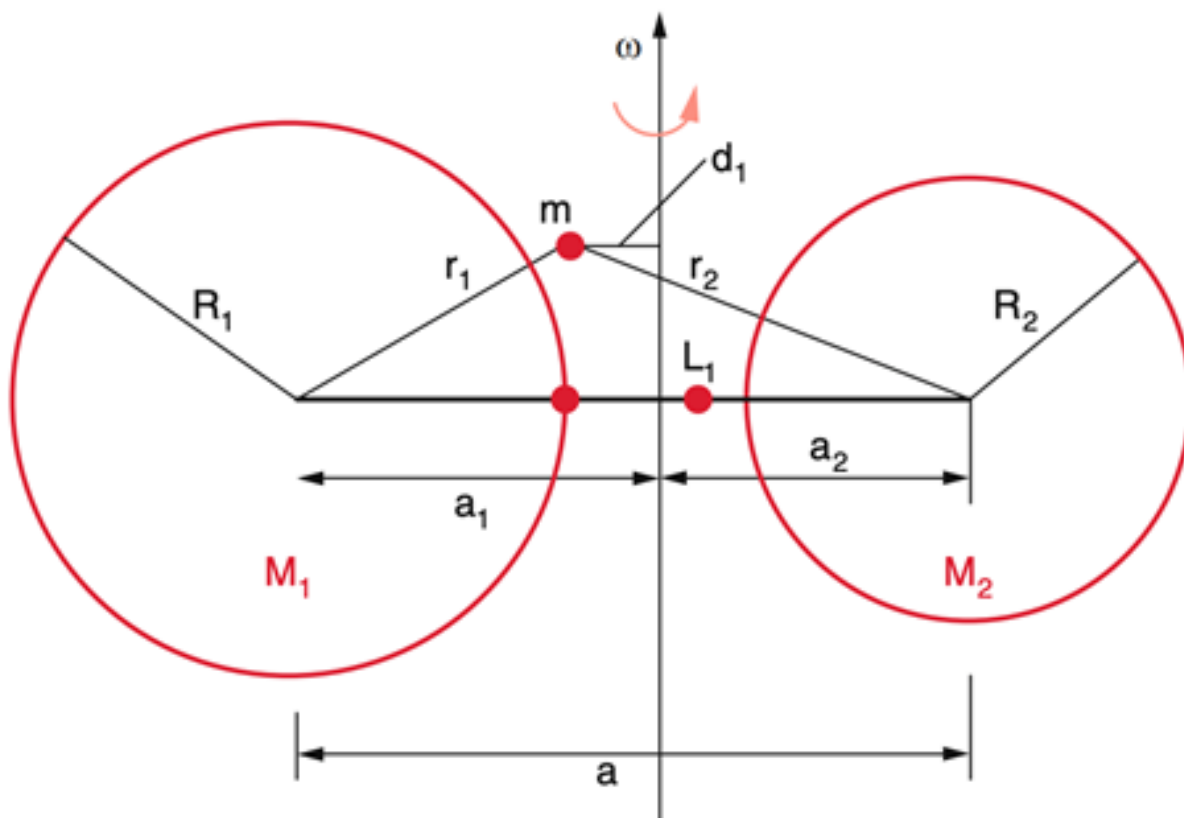


Abbildung 10 Probemasse zur Bestimmung der Roche-Grenze (Demtröder 2014, S. 370)

Während sich die beiden Massen M_i wie zuvor beschrieben in einem Gleichgewicht aus Gravitations- und Zentrifugalkraft befinden, so gilt dies für die Probemasse m nicht mehr. Auf diese wirkt sowohl die entgegengerichtete Masseanziehung durch M_1 und M_2 als auch die Zentripetalkraft um den gemeinsamen Schwerpunkt S . Der Betrag der Zentripetalkraft hängt dabei von dem orthogonalen Abstand d_1 der Probemasse von der Rotationsachse durch S ab:

$$(24) \quad F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot d_1$$

Die Gesamtkraft F auf die Probemasse m bestehend aus den Masseanziehungen der Massen M_1 sowie M_2 und der Zentripetalkraft um die Rotationsachse aus *Gleichung 24* lässt sich nun formulieren:

$$(25) \quad F = -m \cdot G \cdot \frac{M_1}{r_1^2} + m \cdot G \cdot \frac{M_2}{r_2^2} + m \cdot \omega^2 \cdot d_1$$

Für $F < 0$ wird m zu M_1 hin angezogen, für $F > 0$ zu M_2 hin. Für $F = 0$ befindet sich die Probemasse im labilen Gleichgewicht. Der Punkt labilen Gleichgewichts auf der imaginären Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der beiden Massen M_i stellt den Lagrange-Punkt L_1 des Systems dar. Nach Einsetzen des Zusammenhangs

$$(26) \quad a_1 = a \cdot \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right)$$

der sich aus *Gleichung 22* unter Einbezug der Definition der großen Halbachse aus *Gleichung 23* bilden lässt, sowie des geometrischen Zusammenhangs

$$(27) \quad d_1 = a_1 - R_1$$

der aus *Abbildung 10* folgt, ergibt sich für $F = 0$ die maximale Entfernung d_R zwischen den Mittelpunkten der beiden Massen M_i , bei der Masse von M_1 nach M_2 hingezogen wird. Dieser Abstand wird als Roche-Grenze bezeichnet:

$$(28) \quad d_R = R_2 \cdot \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Zur Bestimmung der Äquipotentialflächen des Systems wird ein Koordinatensystem mit dem Nullpunkt in M_1 gewählt, welches mit dem System rotiert. Die Abstände zwischen den Sternen und der Probemasse werden vektoriell beschrieben. Für die Probemasse gilt dann das Potential analog zur Gesamtkraft auf die Probemasse aus *Gleichung 25*:

$$(29) \quad \phi(x, y, z) = -G \cdot \frac{M_1}{|\vec{r}_1|} - G \cdot \frac{M_2}{|\vec{r}_2|} - \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot |\vec{d}_1|^2$$

Die Beträge der Abstände berechnen sich zu:

$$(30 \text{ a-c}) \quad \begin{aligned} a) \quad |\vec{r}_1| &= (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ b) \quad |\vec{r}_2| &= ((a - x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \\ c) \quad |\vec{d}_1| &= ((a_1 - x)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(x - \frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

In der Praxis findet das dimensionslose Roche-Potential vermehrt Anwendung, sodass normiert auf den Abstand a der Komponenten des Doppelsternsystems die dimensionslosen Koordinaten

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{a}; \quad \zeta = \frac{z}{a}; \quad q = \frac{M_1}{M_2}$$

eingeführt werden.

Das dimensionslose Roche-Potential lässt sich nun angeben:

$$(31) \quad \phi_R(\xi, \eta, \zeta) = \frac{-G \cdot M_2}{a} \left\{ \frac{q}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{[(1-\xi)^2 + \eta^2 + \zeta^2]^{\frac{1}{2}}} + \left[\left(\xi - \frac{1}{1+q} \right)^2 + \eta^2 \right]^{\frac{1+q}{2}} \right\}$$

Da hierbei auf den Abstand a der beiden Sterne zueinander skaliert wurde, befindet sich M_1 bei $x = 0$ und M_2 bei $x = 1$. Obige Formel beschreibt das Potential an einem beliebigen Punkt $r(\xi / \eta / \zeta)$.

Auch wenn das Roche-Potential dreidimensional definiert ist, so ist insbesondere dessen Ausdehnung in der ξ - ζ -Ebene für die folgenden Betrachtungen relevant.

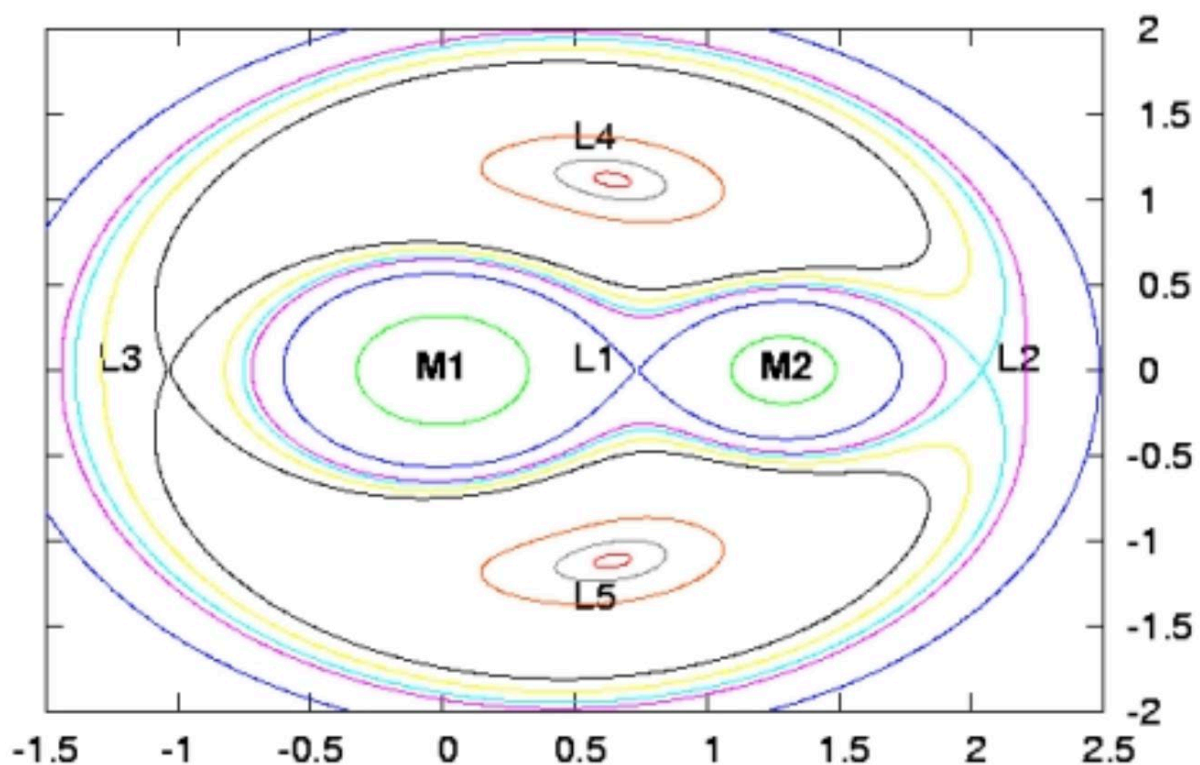


Abbildung 11 Potentialgebirge eines Doppelstern-Systems mit Lagrange-Punkten (Müller 2007)

Die Äquipotentiallinienstruktur in *Abbildung 11* zeigt fünf charakteristische Punkte, die Lagrange-Punkte. Der innere Lagrange-Punkt L1 ist für die Ableitung der Roche-Flächen von

großem Interesse. Die kritische Roche-Fläche ist als dunkelblaue Linie in *Abbildung 11* dargestellt. L2 und L3 bilden die äußeren Lagrange-Punkte. Die Lagrange-Punkte L4 und L5 befinden sich in der ξ - η -Ebene und bilden jeweils zusammen mit den beiden Massen M_1 und M_2 ein gleichseitiges Dreieck.

Die Eigenschaften der Äquipotentialfläche lassen sich anhand von *Abbildung 11* erkennen:

- In der Nähe der Massezentren sind die Äquipotentialflächen nahezu kugelförmig, da hier die Eigengravitation gegenüber den Fliehkräften und der Fremdgravitation des Begleitsterns dominiert.
- Mit steigender Entfernung von den Massezentren nimmt die Deformation der Äquipotentiallinien, also der Gradient, zu.
- Für einen bestimmten Wert $\phi_R = \phi_{L1}$ berühren sich die Äquipotentialflächen im inneren Lagrange-Punkt L1. Die Bedingung für L1 lautet:

$$(32) \quad \vec{\nabla}\phi = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{L1} = -\frac{G*M_2}{a^2} \left\{ \frac{1}{(1-\xi_1)^2} - \frac{q}{\xi_1^2} + 2 \cdot (1+q) \cdot \xi_1 - 2 \right\} = 0$$

$$(33) \quad \phi_{L1} = \phi_R(x_1, 0, 0) = -\frac{G*M_2}{a} \left\{ \frac{q}{\xi_1} + \frac{1}{1-\xi_1} + \frac{1+q}{2} \cdot \left(\xi_1 - \frac{1}{1+q} \right)^2 \right\}$$

- Für Werte $\phi_R > \phi_{L1}$ umschließen die Äquipotentialflächen beide Komponenten des Systems.

Konsequenz des Roche-Modells ist, dass jedem Stern nur ein begrenztes Volumen zur Verfügung steht. Das maximale Volumen V_{\max} wird durch die Äquipotentialfläche ϕ_{L1} begrenzt.

Die zuvor erwähnten „engen“ Doppelsterne können durch diese Erkenntnisse nun in drei Untergruppen eingeteilt werden, die in *Abbildung 12* dargestellt sind und nachfolgend definiert werden sollen.

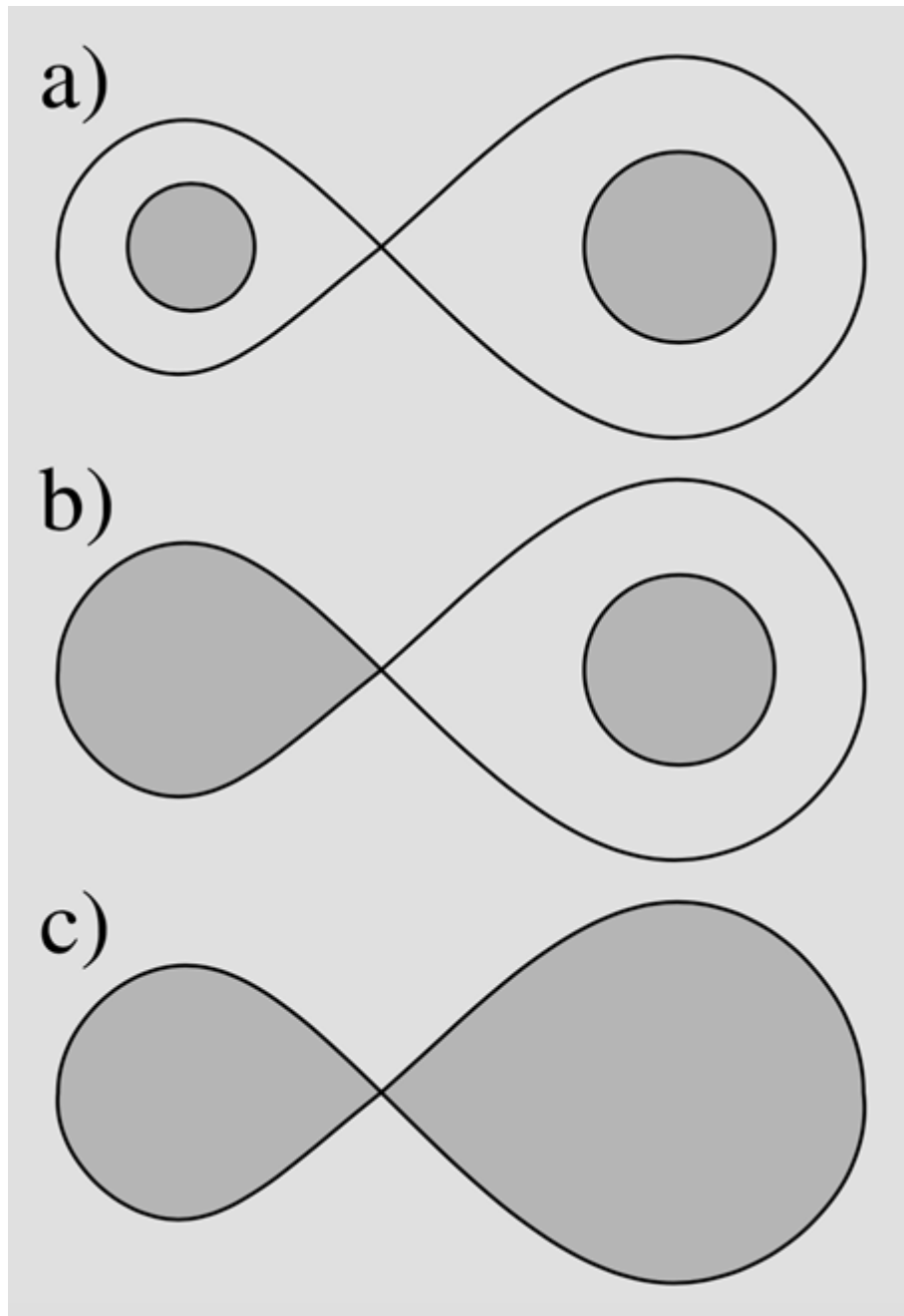


Abbildung 12 Unterguppen der engen Doppelsterne (Karttunen 2017, S. 275)

a) *Getrennte Systeme*

Sofern beide Komponenten des Doppelsternsystems ihr maximales Volumen nicht ausfüllen, so spricht man von einem getrennten System. Es gilt:

$$(34) \quad \phi(r_1) < \phi_{L1} \quad \text{und} \quad \phi(r_2) < \phi_{L1}$$

b) *Halbgetrennte Systeme*

Füllt einer der beiden Komponenten gerade das maximale kritische Roche-Volumen aus, der andere Stern ist jedoch kleiner, so spricht man von einem halbgetrennten System.

c) *Kontaktsysteme / verbundene Systeme*

Füllen beide Sterne ihr kritisches Roche-Volumen gerade aus, so spricht man von einem Kontaktsystem. Werden die Roche-Volumen überfüllt, so spricht man von einem Überkontakt, wobei die Oberfläche durch

$$(35) \quad \phi > \phi_{L1} = konst.$$

gegeben ist.

Sterne sind dynamische Systeme und durchlaufen im Verlauf ihres Sternlebens starke Veränderungen, insbesondere auch ihre Größe betreffend:

Hauptreihensterne, die Teil eines Doppelsternsystems sind, können sich zu Riesen aufblähen und so letztendlich ihr Roche-Volumen füllen oder sogar überfüllen.

Pulsationsveränderliche Sterne als Komponenten eines Doppelsternsystems ändern ihren Radius periodisch und können bei ihrer Pulsation sporadisch oder regelmäßig ihr Roche-Volumen (über-)füllen. Dadurch kann Materie von dem pulsationsveränderlichen Stern zu dessen Begleiter fließen, was als „Roche lobe overflow“ bezeichnet wird. Da das überfließende Plasma bei einem solchen Ereignis den Drehimpuls des Muttersterns besitzt, strömt dieses nicht auf dem direkten Weg über, sondern es kommt zur Ausbildung eines sogenannten Akkretionsflusses. Hierbei entsteht häufig eine Akkretionsscheibe, also eine flache Ansammlung von Materie, die spiralförmig in den Begleitstern übergeht. Bei diesem Vorgang entsteht ein charakteristisches Leuchten im hochenergetischen Bereich der elektromagnetischen Strahlung. Es wird Röntgenstrahlung ausgesendet.

Ein Beispiel für ein solches System stellt das Doppelsternsystem SS-433 dar. Dieses exotische System beinhaltet den ersten entdeckten Mikroquasar und wurde 1976 von dem Röntgensatelliten Ariel V bei der Durchmusterung der galaktischen Ebene nach Röntgenquellen detektiert. Nach der optischen Detektion der Röntgenquelle konnten 1977 im sichtbaren Bereich des Sterns starke H- α -Emissionslinien nachgewiesen werden. Diese verschieben sich mit einer Periode von 164 Tagen beträchtlich, was nur durch Gas erklärt werden kann, welches sich relativistisch bewegt. Dieses Gas stammt jedoch nicht wie erwartet von einem einzelnen Stern, sondern von einer Akkretionsscheibe, die sich um den massereicheren Stern des Doppelsternsystems gebildet hat. Ähnlich wie bei einem Quasar wird die Materie bei SS-433 mit 26% der Lichtgeschwindigkeit in zwei entgegengesetzte Richtungen geschleudert und die dabei auftretenden Richtungsänderungen verursachen eine Verschiebung der Emissionslinien des Spektrums. Der Hauptstern des Systems füllt sein Roche-Volumen vollständig aus und wird von einem schwarzen Loch mit einer Umlaufzeit von 13 Tagen umkreist. Der Massefluss zwischen den beiden Komponenten des Doppelsternsystems SS-433 beeinflusst deren Gewichtsverhältnis und somit direkt deren Bahnverlauf und Drehimpuls.

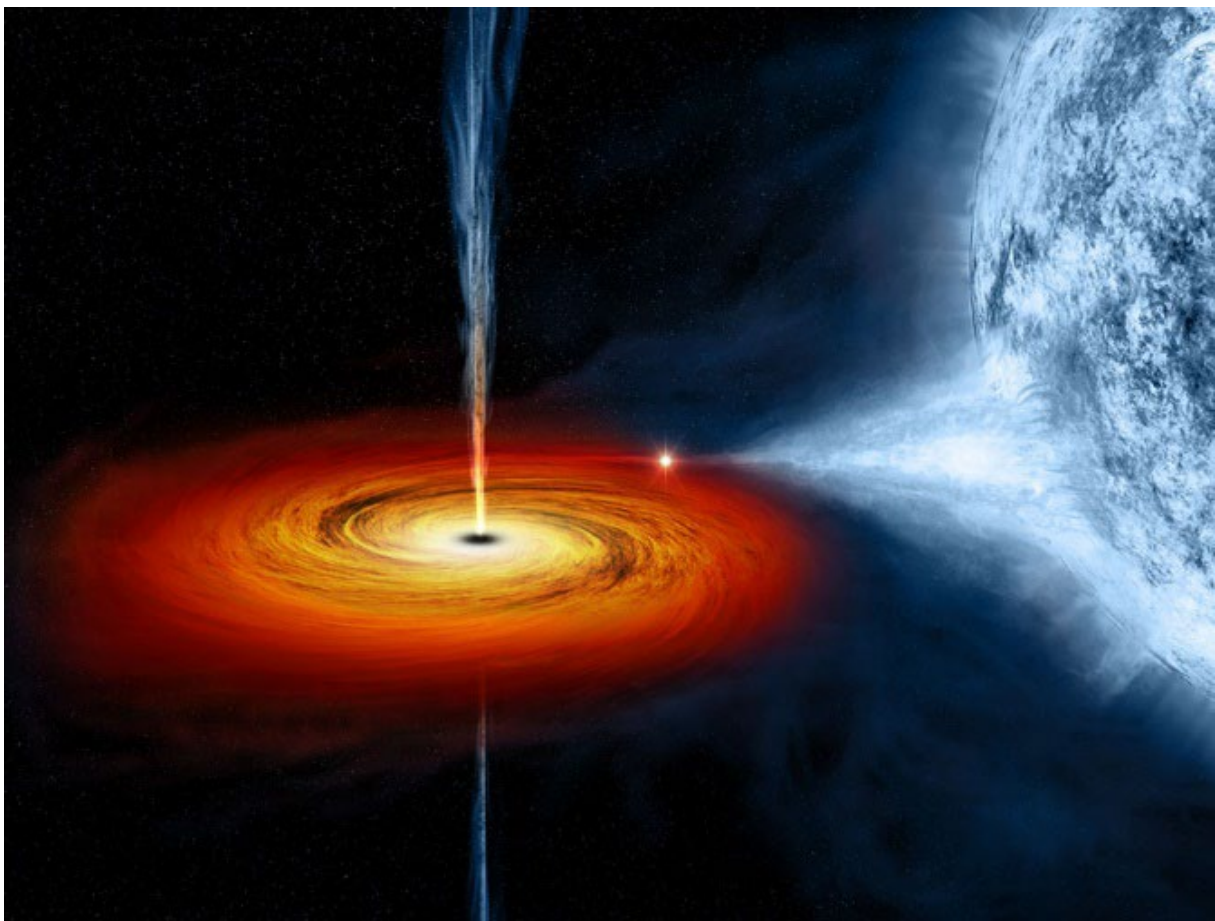


Abbildung 13 Künstlerische Darstellung des Akkretionsflusses von einem Begleitstern zu dessen schwarzen Loch (NASA 2013)

9 Lösung des Zweikörperproblems und Nachweis des Drallerhaltungssatzes für die Doppelsternsysteme

Der Drehimpuls, in der Mechanik auch Drall genannt, stellt in der Astrophysik eine wichtige Erhaltungsgröße dar. Ein Planet des Sonnensystems besitzt beispielsweise aufgrund seiner Bewegung um die Sonne einen Drehimpuls. Dabei stellt der Drehimpuls eine pseudovektorielle Größe dar, dessen Dimension das Produkt aus Masse, Länge und Geschwindigkeit ist. Der Drall eines Systems setzt sich aus den Drehimpulsen der Systemkomponenten zusammen, der entsprechende Drehimpuls einer Systemkomponente besteht in der Regel aus dem Bahndrehimpuls und dem Eigendrehimpuls. Der Bahndrehimpuls entsteht aufgrund der Bewegung eines Massekörpers um einen schwereren Bezugspunkt, während der Eigendrehimpuls durch die Drehung um den Masseschwerpunkt des Massekörpers hervorgerufen wird. Der Drall bezieht sich dabei immer auf einen Bezugspunkt des Raumes, der frei gewählt werden kann! In der Astronomie wird der Bezugspunkt in der Regel in den Schwerpunkt des Zentralgestirns gelegt.

Ein Massepunkt der Masse m , der sich am Ort \vec{r} mit dem Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ bewegt, ist der Drehimpuls \vec{L} durch das Kreuzprodukt aus Ort und Impuls definiert:

$$(36) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Der Bezugspunkt befindet sich dabei am Ort $\vec{r} = 0$, dementsprechend wird der Drehimpuls an einem beliebigen Punkt r_0 in Abhängigkeit des Bezugspunktes angegeben:

$$(37) \quad \vec{r} = (\mathbf{r} - r_0).$$

Führt der Massepunkt eine ebene Kreisbewegung um den Ursprung aus, so liegt der Drehimpulsvektor senkrecht zur Kreisebene. Der Betrag des Vektors lautet:

$$(38) \quad L = mrv = mr^2\omega.$$

Demnach wächst der Drehimpuls proportional zu Winkelgeschwindigkeit und Masse, jedoch quadratisch zum Abstand der Masse zur Drehachse.

Analog zur Impulserhaltung bleibt auch der Drehimpuls eines isolierten physikalischen Systems nach Betrag und Richtung unverändert, unabhängig von den inneren Kräften und Wechselwirkungen zwischen den Bestandteilen des Systems. Diese Drehimpulserhaltung gilt auch unter dem Einfluss konservativer Felder, die kein Drehmoment auf das System ausüben, wie es etwa bei der Gravitation der Fall ist. (vgl. Nolting 2006, S. 216)

Befinden sich die beiden Komponenten eines Doppelsternsystems auf einer Umlaufbahn, die alleine durch ihre gegenseitige gravitative Wechselwirkung bestimmt wird und frei von inneren und äußeren Störungen ist, so kann deren Bewegung als Keplerbahn beschrieben werden. Unter der Annahme zweier idealisierter kreisförmiger Bahnen (Elliptizität $\epsilon = 0$) mit konstantem Abstand r zwischen den beiden Komponenten kann das System aus den beiden Massen m_1 und m_2 als starrer Rotator beschrieben werden. Dieser in der Astronomie als Keplerproblem bezeichnete Sachverhalt soll im Folgenden erläutert werden, bevor eine Herleitung des Energieverlustes in einem Doppelsternsystem aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen erfolgen soll.

Da unter den oben genannten Annahmen die beiden Komponenten des Doppelsternsystems (Massen m_i und Orte \vec{x}_i) ausschließlich aufeinander einwirken, lassen sich deren Bewegungsgleichungen allgemein angeben. Den Newton'schen Gesetzen folgend lässt sich die Kraft auf einen Körper aus der Multiplikation dessen Masse mit der Beschleunigung angeben. Der Vektor der Kraft $\vec{F}_{i,j}$ berechnet sich aus der Masse multipliziert mit der zweiten Ableitung des Ortsvektors $\ddot{\vec{x}}_i$:

$$(39) \quad m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_{1,2}$$

und

$$(40) \quad m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_{2,1}$$

Die Kräfte $\vec{F}_{1,2}$ und $\vec{F}_{2,1}$ hängen nach dem Relativitätsprinzip nur von der relativen Position der Körper zueinander ab, es gilt somit:

$$(41) \quad \vec{r} := \vec{x}_1 - \vec{x}_2 .$$

Zudem sind die beiden Kräfte nach dem dritten Newton'schen Axiom entgegengesetzt gleich

$$(42) \quad \vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} =: \vec{F}(\vec{r})$$

und parallel zu deren gemeinsamen Verbindungslinie gerichtet

$$(43) \quad \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 .$$

Bei den folgenden Betrachtungen wird in Relativ- und Schwerpunktkoordinaten gerechnet. Diese sind in *Abbildung 14* dargestellt.

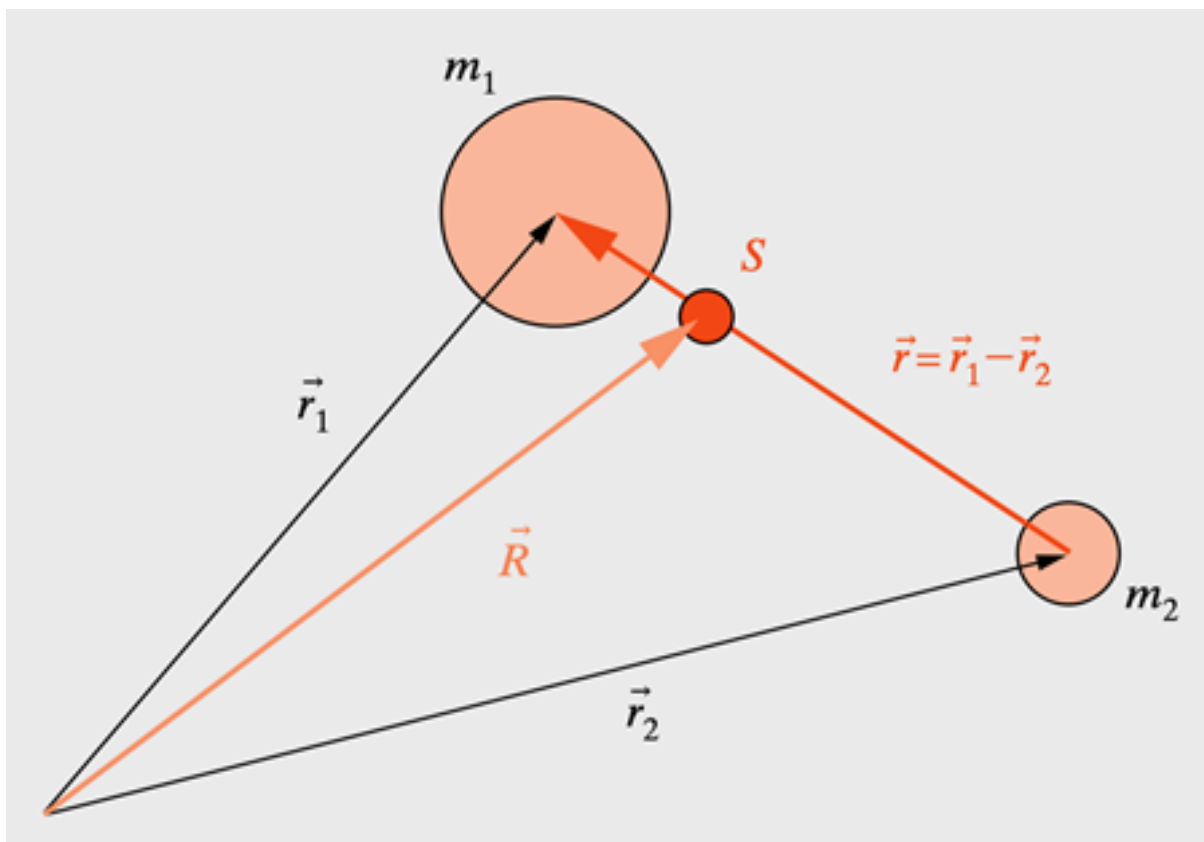


Abbildung 14 Schwerpunkt- und Relativkoordinaten des Zweikörperproblems (Meschede 2015, S. 50)

Der Abstand \vec{r} zwischen den beiden Punktmassen m_i und der Schwerpunktvektor \vec{R} sind in *Abbildung 14* dargestellt und betragen

$$\vec{r} := \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad (\text{siehe Gleichung 41})$$

und

$$(44 \text{ a,b}) \quad \vec{R} := \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

Der Vektor \vec{r} in Relativkoordinaten gibt den Abstand der beiden Sterne zueinander an, während der Vektor \vec{R} in Schwerpunktkoordinaten auf das Baryzentrum - also den Schwerpunkt - des Doppelsternsystems zeigt (siehe *Abbildung 14*).

Durch Substitution von \vec{x}_1 bzw. \vec{x}_2 in *Gleichung 44a* durch die umgestellten allgemeinen Bewegungsgleichungen (*Gleichungen 39 & 40*) aus dem ersten Schritt und unter Beachtung des

dritten Newton'schen Axioms (siehe *Gleichung 42*) lässt sich die zweite Ableitung des Vektors $\ddot{\vec{r}}$ bestimmen:

$$(45) \quad \ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{1,2}$$

Analog lässt sich aus *Gleichung 44b* die zweite Ableitung des Vektors $\ddot{\vec{R}}$ bestimmen:

$$(46) \quad \ddot{\vec{R}} = 0$$

Aus *Gleichung 46* lässt sich schlussfolgern, dass die geometrische Krümmung der Bewegung des Baryzentrums gleich null ist, also der Masseschwerpunkt des Doppelsternsystems eine geradlinige und gleichförmige Bewegung beschreibt.

Durch Umformung von *Gleichung 45* kann die reduzierte Masse μ des Zweikörperproblems bestimmt werden, wodurch der Übergang zum Einkörperproblem gelingt:

$$(47) \quad \mu \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \rightarrow \mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}.$$

Dieser Zusammenhang sagt aus, dass sich die Relativkoordinate $\vec{r}(t)$ analog einem Körper der Masse μ verhält, der sich um ein ortsfestes Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ dreht. Damit ist der Übergang von einem Zweikörperproblem mit zwei Komponenten der Massen m_1 und m_2 hin zu einem Einkörperproblem mit einer Komponente der Masse μ gelungen. Es erfolgt die Umrechnung zurück in die ursprünglichen Koordinaten:

$$(48) \quad \vec{x}_1(t) = \vec{R}(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}(t)$$

und

$$(49) \quad \vec{x}_2(t) = \vec{R}(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}(t)$$

Beide Komponenten bewegen sich also um den gemeinsamen Schwerpunkt und beschreiben dabei Bahnen, deren Größenverhältnis durch das reziproke Verhältnis ihrer Massen bestimmt wird.

Die Kraft $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ liegt parallel zur Verbindungslinie \vec{r} zwischen den beiden Komponenten des Doppelsternsystems, weshalb sie eine Zentralkraft ist und kein Drehmoment auf den umlaufenden Körper ausübt (siehe *Gleichung 43*). Es gilt nach wie vor:

$$(50) \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0.$$

Aus dem Zusammenhang zwischen Drehimpuls \vec{L} und Drehmoment \vec{M}

$$(51) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

folgt für $\vec{M} = 0$ (siehe *Gleichung 50*):

$$(52) \quad \vec{L} = \int_{x_1}^{x_2} 0 \, dt = c$$

Der **Drehimpuls** ist demnach nach Betrag und Richtung zeitlich konstant. Er ist ein Integral der Bewegung. Die Bewegung erfolgt in einer festen Ebene. Aus der Konstanz des Drehimpulses folgt das 2. Kepler'sche Gesetz, welches für jedes beliebige Zentralkraftfeld gilt.

Die vektorielle Bewegungsgleichung des Einkörperproblems lässt sich ebenso in ebenen Polarkoordinaten darstellen. Hierbei zerfällt diese in zwei gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen, wobei $\dot{\varphi}$ die erste Ableitung der Winkelkoordinate und r die Radialkoordinate angibt:

$$(53) \quad \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{1}{\mu}F(r)$$

und

$$(54) \quad \frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\varphi}) = 0$$

Aus der Differentialgleichung in *Gleichung 54* lässt sich erneut durch Integrieren der Erhalt des Drehimpulses ablesen:

$$(55) \quad L = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Auch die **Energieerhaltung** lässt sich nach dem Übergang des Zweikörper- zum Einkörperproblem beweisen. Grundlage für dieses bildet die Gravitationskraft:

$$(56) \quad F_G(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Unter Verwendung der Drehimpulsgleichung des Doppelsternsystems in Polarkoordinaten aus *Gleichung 52* lässt sich durch Elimination von $\dot{\varphi}$ durch den Zusammenhang aus *Gleichung 54* ein Gesetz für den Abstand angeben. Mit

$$(57) \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}$$

folgt demnach

$$(58) \quad \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} = -\frac{1}{\mu} F(r) = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}$$

Nach Multiplikation mit \dot{r} und μ kann eine Differentialgleichung formuliert werden:

$$(59) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G(m_1+m_2)\mu}{r} \right) = 0$$

Die drei Summanden dieser Gleichung entsprechen dem Radial- und Winkelanteil der kinetischen Energie sowie der potentiellen Energie im äußeren Zentral-potential. Die Gesamtenergie im System ergibt sich durch Integration von *Gleichung 59*:

$$(60) \quad E = \int \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G(m_1+m_2)\mu}{r} \right) \right] dt$$

$$\rightarrow E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G(m_1+m_2)\mu}{r} = \text{const.}$$

Die Energie ist zeitlich konstant und analog zum Drehimpuls ebenfalls ein Integral der Bewegung. Dieses Ergebnis erfüllt die Erwartungen, da es sich bei dem Gravitationsfeld um ein konservatives Feld handelt.

Durch den Übergang vom Zweikörperproblem der Doppelsterndynamik zu einem Einkörperproblem konnten der Drehimpuls- und Energieerhaltungssatz für ein Doppelsternsystem hergeleitet und deren Existenz nachgewiesen werden. Sofern weder innere noch äußere Störungen auf das Doppelsternsystem einwirken kann von der Existenz eines analogen Einkörperproblems und der Gültigkeit der beiden Sätze ausgegangen werden. Wenn jedoch beispielsweise ein Massefluss zwischen den Komponenten des Systems stattfindet oder etwa Energie in Form von Gravitationswellen abgegeben wird, so lässt sich das analoge Einkörperproblem nicht mehr ohne Weiteres aufstellen.

10 Anwendung der Erkenntnisse zur Bestimmung der Massen von Doppelsternen

Wie bereits eingangs erwähnt spielen Doppelsternsysteme eine entscheidende Rolle bei der Bestimmung wesentlicher physikalischer Parameter von Sternen. Um die Entstehung und den „Lebensweg“ von Sternen nachvollziehen zu können, müssen auf der Grundlage von bekannten physikalischen Größen geeignete Sternmodelle entwickelt werden.

Zweifelsohne ist die Kenntnis über das Gewicht eines Sterns für Astronomen hierbei von herausragender Bedeutung, da wie bereits gezeigt für Hauptreihensterne ein direkter Zusammenhang zwischen deren Gewicht und der Helligkeit sowie dem Durchmesser besteht.

Für visuelle Doppelsterne bildet der zuvor verwendete Schwerpunktsatz einen geeigneten Ansatz zur Bestimmung des Gewichts der Komponenten eines Doppelsternsystems:

$$(61) \quad r_1 m_1 = r_2 m_2$$

Anhand dieser Gleichung ist erkennbar, dass die masseärmere Komponente des Doppelsternsystems stets weiter vom Schwerpunkt entfernt ist und die beiden Bahnen der Sterne ähnliche Ellipsen darstellen, die sogenannten *wahren absoluten Ellipsen*. (Lermer 2000, S. 157)

Am Sternhimmel ist die Beobachtung dieser absoluten Ellipsen jedoch schwer umsetzbar, da der Schwerpunkt als Referenzpunkt nicht beobachtbar ist. Mit hoher Genauigkeit ist jedoch die scheinbare Bewegung einer Komponente des Doppelsternsystems um die andere beobachtbar.

Dabei beschreiben die beiden Sterne eine zur *absoluten Ellipse* ähnliche Bahn:

$$(62) \quad r = r_1 + r_2 = r_1 + \frac{m_1}{m_2} r_1$$

bzw.

$$(63) \quad r = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1$$

Die *wahre relative Ellipse* ist somit gegenüber der *wahren absoluten Ellipse* der ersten Komponente um den Faktor

$$\frac{m_1 + m_2}{m_2}$$

gestreckt, der nur vom Gewichtsverhältnis der beiden Sterne abhängt. Jedoch lässt sich auch diese Ellipse nicht exakt beobachten, da sie am Sternhimmel nur als zweidimensionale Projektion, als sogenannte *scheinbare relative Bahnellipse*, auftritt. Nichtsdestotrotz kann bei bekannter Entfernung des Doppelsternsystems unter Berechnung der großen Halbachse a_{relativ} der *scheinbaren relativen Bahnellipse* das dritte Kepler'sche Gesetz für das Doppelsternsystem aufgestellt werden:

$$(64) \quad m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a_{\text{relativ}}^3}{T^2}$$

Die Umlaufdauer T muss über die Beobachtung der relativen Bahn bestimmt werden. Das Masseverhältnis der beiden Komponenten der Massensumme kann nur durch den Erhalt von Informationen über die absoluten Bahnen bestimmt werden. Solche Informationen können aus periodischen Schwankungen der Eigenbewegung oder der Dopplerverschiebung des Systems

gewonnen werden, sodass nach der Bestimmung des Verhältnisses $r_1:r_2$ über den Schwerpunktsatz das Masseverhältnis berechnet werden kann:

$$(65) \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Sind die Abstände zweier Komponenten eines Doppelsternsystems zu gering, um eine optische Trennung selbst bei beobachtungsgünstiger Lage zuzulassen, kann die Bewegung dieser spektroskopischen Doppelsterne anhand der Dopplerverschiebung ihres Spektrums bestimmt werden. Nur die Radialkomponente der Bewegung mit der Geschwindigkeit v_{radial} verursacht den Dopplereffekt in Beobachterrichtung:

$$(66) \quad v_{\text{radial}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c$$

Für Kreisbahnen ergibt sich wegen

$$(67) \quad \omega = \frac{v}{r} = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

mit dem Schwerpunktsatz

$$(68) \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Für den Fall, dass sich der Beobachter in der Bahnebene befindet, der Doppelstern also ein Bedeckungsveränderlicher ist, lässt sich die große Halbachse der relativen Ellipsenbahn bestimmen:

$$(69) \quad a_{\text{relativ}} = r_1 + r_2 = \frac{v_1}{\omega} + \frac{v_2}{\omega} = \frac{T}{2\pi} (v_1 + v_2).$$

Anhand der Helligkeitskurve eines Bedeckungs-veränderlichen lässt sich dessen Umlaufdauer T einfach bestimmen. Mit der großen Halbachse der relativen Ellipsenbahn kann, analog zur Berechnung des Massenverhältnisses bei visuellen Doppelsternen, mithilfe des dritten Kepler'schen Gesetzes die Masse der beiden Komponenten bestimmt werden.

Da bei spektroskopisch-fotometrischen Doppelsternen hierfür keine Entfernungsmessung des Systems notwendig ist, gilt die Massebestimmung für diese Art der Doppelsterne als relativ verlässlich. Aus dem Verlauf der Helligkeitskurve kann zudem eine Bestimmung der Sterndurchmesser erfolgen. (vgl. Lerner 2000, S. 159 f.)

11 Emission von Gravitationswellen durch Doppelsternsysteme

Das Trägheitsmoment eines Doppelsternsystems als Einkörperproblem berechnet sich aus der reduzierten Masse (siehe *Gleichung 47*) multipliziert mit dem quadrierten Abstand um die Drehachse a :

$$(70) \quad I_1 = \frac{m_1 m_2 a^2}{m_1 + m_2} = \mu a^2 \quad I_2 \approx 0$$

Die Kreisbahn ist durch das Gleichgewicht von Zentrifugal- und Gravitationskraft bestimmt:

$$(71) \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Omega^2 a = G \frac{m_1 m_2}{a^2}.$$

Aus diesem Zusammenhang kann die Bahnfrequenz Ω des Systems bestimmt werden:

$$(72) \quad \Omega^2 = G \frac{m_1 + m_2}{a^3}$$

Die Bahnfrequenz Ω aus *Gleichung 72* und das Trägheitsmoment I_1 aus *Gleichung 70* können nun in die allgemeine Formel für die Strahlungsleistung einer rotierenden Masseverteilung

$$(73) \quad P = \frac{32G\Omega^6}{5c^5} I_1^2$$

eingesetzt werden:

$$(74) \quad P = \frac{32G^4}{5c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5}.$$

Diese Leistungsabstrahlung P in Form von Gravitationswellen bedeutet einen Energieverlust im System, was eine kontinuierliche Verringerung des Abstandes a zwischen den Sternen verursacht. Nach der Spiralzeit t_{spiral} stürzen die beiden Komponenten schließlich ineinander. Im Keplerproblem ist die Gesamtenergie E des Systems gleich dessen halber potentieller Energie (Fließbach 2012, S. 208):

$$(75) \quad E = -G \frac{m_1 m_2}{2a}$$

Durch die Abstrahlung von Gravitationswellen nimmt die Leistung im System ab:

$$\begin{aligned}
 (76) \quad P &= -\frac{dE}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{2a^2} \frac{da}{dt} = \frac{32G^4 m_1m_2(m_1+m_2)}{5c^5 a(0)^4} \\
 &= -\frac{1}{t_{\text{Spiral}}}
 \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung lauten:

$$(77) \quad x = 1 - \frac{t}{t_{\text{Spiral}}}$$

oder

$$(78) \quad a(t) = a(0) \left(1 - \frac{t}{t_{\text{Spiral}}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Für zwei Sterne mit je einer Sonnenmasse Gewicht, die sich in einem Abstand von 10 Sonnenradien umkreisen, ergibt sich mit obiger formulierter *Gleichung 78* eine Spiralzeit von $\sim 10^{12}$ Jahren.

Zu beachten ist jedoch, dass dieser Ansatz zur Berechnung der Spiralzeit eines Doppelsternsystems aufgrund der Abstrahlung von Gravitationswellen nur ausreichend genaue Werte für t_{Spiral} liefert, sofern sich beide Komponenten des Doppelsternsystems auf annähernd kreisförmigen Bahnen umkreisen. Für stark elliptische Bahnen bietet der Ansatz nur eine grobe Abschätzung der Größenordnung der Spiralzeit.

Aus der Formel für die abgestrahlte Leistung in Form von Gravitationswellen (*Gleichung 74*) folgt:

$$(79) \quad P \propto \frac{1}{a^5}.$$

Mit abnehmendem Abstand der beiden Komponenten des Doppelsternsystems nimmt demnach die abgestrahlte Leistung in Form von Gravitationswellen enorm zu. Der kleinstmögliche Bahnabstand zweier Sterne eines Doppelsternsystems ergibt sich aus deren addierten Radien:

$$(80) \quad a_{\text{min}} = R_1 + R_2.$$

Zwei sich gegenseitig umkreisende Neutronensterne können bei einem Gewicht von einer Sonnenmasse pro Komponente durchaus lediglich einen mittleren Abstand von wenigen 10km zueinander besitzen. Die errechnete Spiralzeit wäre für solch ein System kaum größer als die Bahnperiode T . Damit wäre die Bewegung allenfalls quasiperiodisch und relativistisch,

weshalb die auftretenden Gravitationswellen enorme Strahlungsleistungen erreichen würden. Einige der zuvor getroffenen Annahmen treffen auf ein solches System nicht mehr zu:

- Periodische nichtrelativistische Bewegung im Newton'schen Feld
- Quadrupolstrahlung für die Abstrahlung

Das Ergebnis für die Spiralzeit kann also wie erwähnt nur für eine Abschätzung der Größenordnung herangezogen werden.

12 Nachweis von Gravitationswellen

Nachdem der rechnerische Nachweis und die indirekte Beobachtung von Gravitationswellen durch die Verringerung der Bahnraden in bestimmten Doppelsternsystemen bereits früh gelungen ist, war für die Wissenschaft sicherlich die direkte Beobachtung von Gravitationswellen der nächste logische und notwendige Schritt, um weitere Aussagen über diese treffen zu können. Zur Messung von Gravitationswellen haben sich zwei Detektortypen bzw. drei Methoden etabliert:

Resonanter Detektor

Grundlage dieser Messtechnik ist, dass die Kräfte einer Gravitationswelle oszillierende, quadrupol-förmige Auslenkungen bewirken. In einem Festkörper sollte eine Gravitationswelle daher Quadrupol-schwingungen anregen, die im Resonanzfall bereits bei sehr kleiner Amplitude nachweisbar wären. (vgl. Fließbach 2012, S. 215)

Es handelt sich um ein recht einfaches Gerät zum Nachweis von Gravitationswellen, welches bereits vom US-amerikanischen Physiker Joseph Weber in den 1960er Jahren entwickelt wurde. Dieser verwendete lediglich eine große, feste Stange aus Metall, die gegen äußere Erschütterungen geschützt gelagert wurde. Die Resonanzfrequenz der Stange wurde auf die Frequenz der zu detektierenden Gravitationswellen ausgelegt, sodass die Verformung des Raumes durch eine Gravitationswelle über die Nachweisgrenze der Messinstrumente verstärkt werden konnte.

Interferometrischer Detektor

Diese Messtechnik basiert auf der Theorie, dass freie Teilchen im Feld einer Gravitationswelle Abstandsänderungen erfahren, die proportional zur Amplitude der Welle sind. (vgl. Fließbach 2012, S. 215)

Der Physikalische Abstand L der Teilchen ändert sich um ΔL :

$$(81) \quad \frac{\Delta L}{L} = h \cos(\omega t)$$

Durch diesen Zusammenhang wird die messbare relative Längenänderung $\frac{\Delta L}{L}$ mit der Amplitude h der Gravitationswelle verknüpft. Die Längenänderung erfolgt dabei senkrecht zur Einfallrichtung der Gravitationswelle. Trotz der beträchtlichen Energien, die bei einer Supernova oder dem Kollaps eines Doppelsternsystems in Form von Gravitationswellen frei werden können, sind die dadurch verursachten Längenänderungen extrem klein, da die Amplitude umgekehrt proportional zur Entfernung der Quelle ist. (vgl. Fließbach 2012, S. 216)

Bei einem interferometrischen Detektor werden zwei Massen mit Spiegeln im gleichen Abstand L von der kohärenten Lichtquelle mit einem Winkel von 90° zueinander als Pendel aufgehängt. Die Pendelfrequenz ω_0 der beiden Gewichte in der Größenordnung von einer Tonne liegt dabei deutlich unterhalb der Frequenz ω der Gravitationswelle. Daher bewegen sich die Massen analog zu freien Teilchen. Das kohärente Laserlicht wird durch einen halbversilberten Spiegel in Richtung der beiden Spiegel aufgeteilt.

Die durch die Gravitationswellen verursachte Abstandsänderung ΔL eines der beiden Spiegel führt zu einer Phasenverschiebung

$$(82) \quad \Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda_{Laser}}$$

des Laserstrahls der Wellenlänge λ_{Laser} , der die Strecke zwischen dem entsprechenden Spiegel und dem Detektor zurücklegt.

Der Detektor kann die Interferenz des Laserlichts vom Referenz-Spiegel mit dem vom Mess-Spiegel kommenden Laserlicht registrieren. Eine höhere Messgenauigkeit dieser Phasenverschiebung kann durch n -faches Durchlaufen der Strecke sowie durch eine hohe Laserleistung erreicht werden. Eine längere Strecke als die n -fache Zeitdauer der Zeitspanne zwischen minimaler und maximaler Auslenkung ist nicht sinnvoll, da die zu messende Auslenkung dann wieder abnimmt. Der maximal sinnvolle Lichtweg $n L$ berechnet sich zu

$$(83) \quad n L = \pi \frac{c}{\omega}$$

Unter dem gravitativen Einfluss einer Gravitationswelle auf die Masse ändert sich die Strecke $n L$ um $n \Delta L$, die Phasendifferenz ausgelöst durch eine Gravitationswelle in einem Interferometer der Länge $n L$ ergibt sich somit analog zu der in einem der Länge L zu:

$$(84) \quad \Delta\phi_{\text{Gravitationswelle}} = 2\pi \frac{n \Delta L}{\lambda_{\text{Laser}}} = \pi \frac{\omega_{\text{Laser}}}{\omega} h.$$

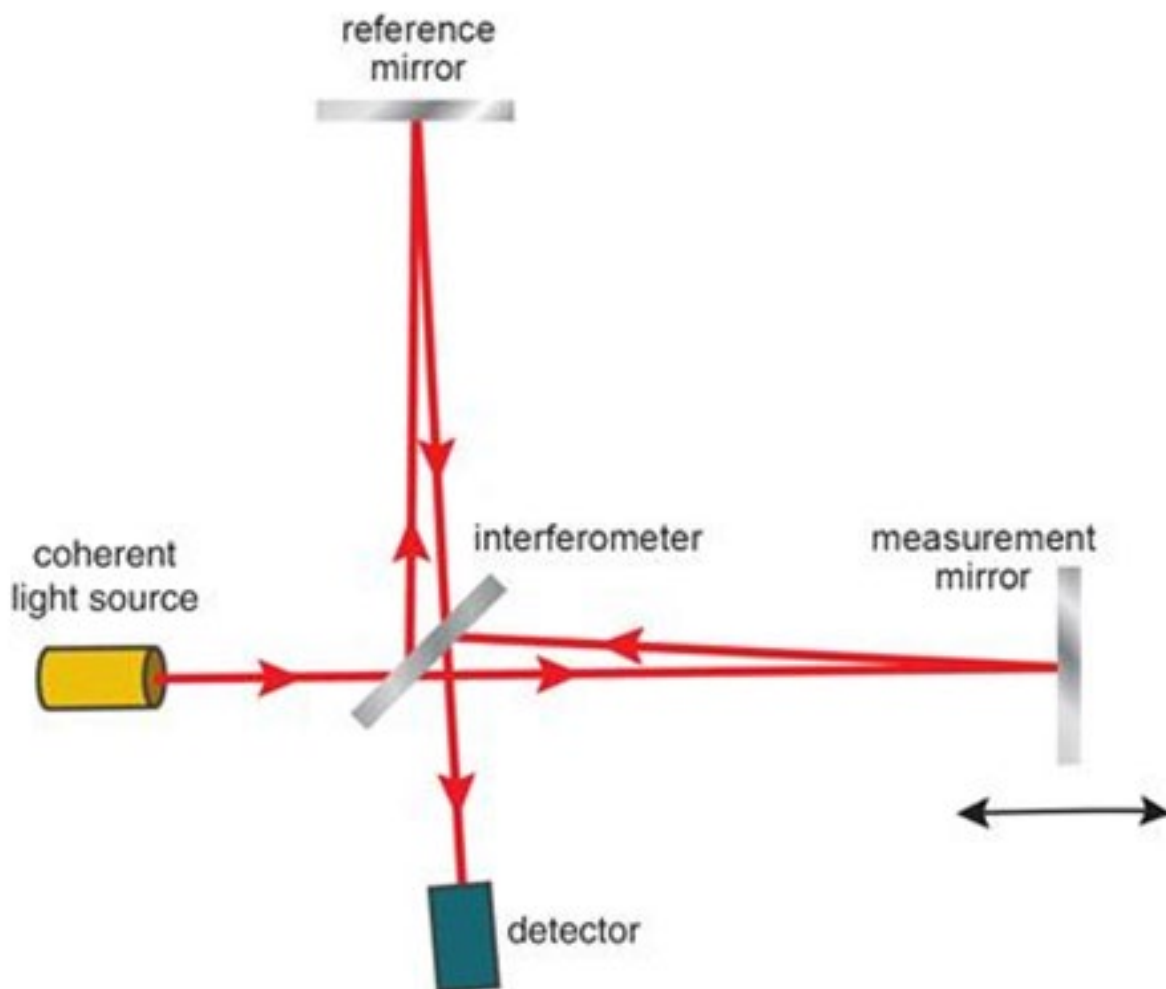


Abbildung 15 Laserinterferometer (Renyshaw GmbH 2020)

Die Nachweisgrenze einer durch eine Gravitationswelle induzierten Phasendifferenz wird durch die quantenmechanische Unschärfe, die Effizienzrate des Photonennachweises sowie Reflexionsverluste begrenzt. Die Effizienzrate des Photonennachweises beträgt beispielsweise lediglich 50%. (vgl. Fließbach 2012, S. 217)

Pulsar Timing Methode

Bei diesem Ansatz der Detektion wird eine etwas andere Strategie verfolgt. Es werden 20 bis 50 sogenannter Millisekunden-Pulsare beobachtet; dies sind besondere Neutronensterne, die im Millisekunden-Bereich periodisch wiederkehrende Signale im Radio- oder Röntgenfrequenzbereich aussenden. Da sich beim Passieren einer Gravitationswelle durch die Erde der Raum in einer Richtung zusammenzieht und sich in die andere Richtung ausdehnt, sollte eine

Gravitationswelle eine messbare Veränderung der Periodendauer eines oder mehrerer Millisekunden-Pulsare bewirken. Dadurch könnten Gravitationswellen im Nanohertzbereich beobachtet werden.

Diese Art der Gravitationswellen-Detektion wird beispielsweise von dem europäischen Pulsar-Timing-Array, dem North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves und dem Parkes Pulsar Timing Array in Australien betrieben.

13 Zusammenfassung und Ausblick

In dem vorliegenden Artikel wurde die Dynamik von Doppelsternsystemen in all ihren Facetten beleuchtet.

Mit der Dynamik der (Doppel-)Sternentwicklung beginnend wurde die Klassifizierung und Beobachtung von Doppelsternsystemen heute und in der Vergangenheit beschrieben. Anhand allgemeiner physikalischer Zusammenhänge, wie sie auch in der „irdischen“ Physik gelten, wurde der Drall-erhaltungssatz für Doppelsternsysteme hergeleitet und dessen Existenz unter den angegebenen Voraussetzungen bewiesen. Ebenso wurde die aus der Dynamik von Doppelsternen resultierende Emission von Gravitationswellen dargestellt. Für enge Doppelsterne wurde zudem das Roche-Volumen aufgestellt und der Massefluss zwischen Doppelsternen beschrieben.

Die Physik ist universell gültig und so lassen sich Analogien zwischen alltäglichen, „irdischen“ physikalischen Beobachtungen und den Berechnungen zur Dynamik der Doppelsterne fern unseres Sonnensystems feststellen.

Durch die (Astro-)Physik und die Mathematik lassen sich wohl auch in Zukunft noch viele spannende Entdeckungen in unserem Universum machen und verblüffende Erkenntnisse gewinnen.

„Ich begreife nicht, wie jemand nachts nach draußen geht, zum Himmel hochblickt und nicht den Wunsch haben kann, Astronom zu werden.“

Don Schneider, Astronom am Hale Teleskop, 2005

Literaturverzeichnis

- Demtröder, Wolfgang (2014): *Experimentalphysik 4: Kern-, Teilchen- und Astrophysik*, 4. Auflage, Berlin: Springer-Verlag
- Deuther, Henrik (2009): *Mehrfachsysteme, Sternhaufen*, in: *Einführung in die Astronomie und Astrophysik I*, [online] https://www2.mpia-hd.mpg.de/homes/beuther/EAA_ws1314_V11_Sternsysteme.pdf
- Fischer, Daniel (2010): *Doppelstern mit Materiefluss zwischen Scheibe direkt abgebildet*, auf: abenteuer-astronomie.de [online] <https://abenteuer-astronomie.de/doppelstern-mit-materiefluss-zwischen-scheiben-direkt-abgebildet/>
- Fließbach, Torsten (2012): *Allgemeine Relativitätstheorie*, 6. Auflage, Siegen: Springer-Verlag
- Hanslmeier, Arnold (2014): *Einführung in Astronomie und Astrophysik*, 3. Auflage, Heidelberg: Springer-Verlag
- Hattenbach, Jan (2015): *Ein Quasar bestätigt die Relativitätstheorie*, auf: Spektrum.de, [online] <https://www.spektrum.de/news/quasar-qj287-bestaetigt-wieder-allgemeine-relativitaetstheorie/1390649>
- Karttunen, Hannu et al (2017): *Fundamental Astronomy*, 6. Auflage, Helsinki: Springer-Verlag
- Lang, Kenneth R. (1974): *Astrophysical Formulae. A Compendium for the Physicist and Astrophysicist*, New-York: Springer-Verlag
- Lerner, Reinhardt (2000): *Grundkurs Astronomie*, 6. Auflage, München: Bayerischer Schulbuch-Verlag
- Marcadon, F. / Appourchaux, T. / Marques, J. P. (2018): *Asteroseismic and orbital analysis of the triple star system HD 188753 observed by Kepler*, in: *Astronomy and Astrophysics*, Nr. 617
- Mayer, Christian (1781): *Verzeichnis aller bisher entdeckten Doppeltsterne*, in: Johann Elert Bode (Hrsg.), *Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1784*, Berlin
- Meschede, Dieter (2015): *Gerthsen Physik*, 25. Auflage, Bonn: Springer-Verlag
-

-
- Müller, Andreas (2007): *Roche-Volumen*, in: *Lexikon der Astronomie*, auf: *Spektrum.de*, [online] <https://www.spektrum.de/lexikon/astronomie/roche-volumen/413>
- NASA (2013): *Heavy Black Hole Jets in 4U1630-47*, auf: *apod.nasa.gov*, [online] <https://apod.nasa.gov/apod/ap131120.html>
- NASA, ESA, M. Livio and the Hubble 20th Anniversary Team (2019): *Carina Nebula's 'Mystic Mountain'*, auf: *nasa.gov*, [online] <https://www.nasa.gov/image-feature/carina-nebulas-mystic-mountain>
- Nolting, Wolfgang (2006): *Grundkurs Theoretische Physik 1. Klassische Mechanik*, 8. Auflage, Berlin: Springer-Verlag
- Renishaw GmbH (2020): *Wie funktionieren interferometrische Systeme?*, [online] <https://www.renishaw.de/de/wie-funktionieren-interferometrische-systeme--38612>
- Schlimmer, J. S. (2018): *Kurze Geschichte der Doppelsternbeobachtung*, [online] http://epsilon-lyrae.de/Doppelsterne/Artikel/Doppelsterne_Geschichte.html
- Unsöld, Albrecht / Baschek, Bodo (1991): *Der neue Kosmos. Einführung in die Astronomie und Astrophysik*, Heidelberg: Springer-Verlag
- Weiprecht, Jürgen (2002): *Beobachtungsmethoden und Klassifikation von Doppelsternen*, [online] <https://www.astro.uni-jena.de/Teaching/Praktikum/praktikum/pra2002/node155.html>
- Weisberg, J. M. / Nice, D. J. / Taylor, J. H. (2010): *Timing Measurements of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16*, in: *The Astrophysical Journal*, Nr. 722, S. 1030 - 1034
-

Autor:innen



Fabian Fries ist seit 2015 bei der Tesat-Spacecom GmbH & Co. KG, einer Tochter der Airbus Defence and Space, beschäftigt. Zunächst absolvierte er dort ein duales Studium in Kooperation mit der Dualen Hochschule Baden-Württemberg Stuttgart, seit Ende 2018 ist er dort als Entwickler im Power Supply Development tätig. Im Frühjahr 2019 begann er das berufsbegleitende Masterstudium „Elektrotechnik“ an der Wilhelm Büchner Hochschule, welches er im Herbst 2021 erfolgreich abschließen wird.



Prof. Dr.-Ing. Manfred Hahn ist seit September 2018 bei der WBH und vertritt den Maschinenbau im Bachelor- und Masterstudiengang, sowie den Bachelorstudiengang Maschinebau-Informatik. In der Lehre macht er sich in den analytischen Methoden der Technischen Mechanik und der Finite-Elemente-Methode stark. Im Weiteren liegen seine Kompetenzen in den analytischen Methoden des Leichtbaus und im Speziellen dem Faserverbundleichtbau. Studiert hat Herr Prof. Dr.-Ing M. Hahn Luft- und Raumfahrttechnik, weswegen er an der WBH außerdem dieses Gebiet mit in die Lehre einfließen lässt. Dazu gehören vor allem die Astronomie, die bemannte und unbemannte Raumfahrt und der Segelflug.

Ansprechpartner:innen

Prof. Dr.-Ing. Manfred Hahn

Wilhelm Büchner Hochschule, Hilpertstrasse 31, D-64295 Darmstadt, Germany,

E-Mail: Manfred.Hahn@wb-fernstudium.de

Überblick über die Ausgaben der Schriftenreihe

Ausgabe 1 / 2022: **Christoph Sternberg, Ralf Isenmann**

Untersuchung regionaler Besonderheiten im
Individualverkehr bei ausgewählten deutschen
Smart-City-Projekten

Die Wilhelm Büchner Hochschule versteht sich als innovative, interdisziplinär ausgerichtete Hochschule für Technik. Unsere Kernbereiche sind Ingenieurwissenschaften, Informatik, Wirtschaftsingenieurwesen und Technologiemanagement sowie Energie-, Umwelt- und Verfahrenstechnik.

Eine Basis für die kontinuierliche Weiterentwicklung von Studiengängen stellt die anwendungsorientierte Forschung unter Einbindung aller Fachbereiche dar. Forschung an der Wilhelm Büchner Hochschule beinhaltet sowohl fachspezifische als auch fernstudien- und weiterbildungsspezifische Themen.

Unser vollständiges Leitbild und weitere Informationen finden Sie unter

www.wb-fernstudium.de